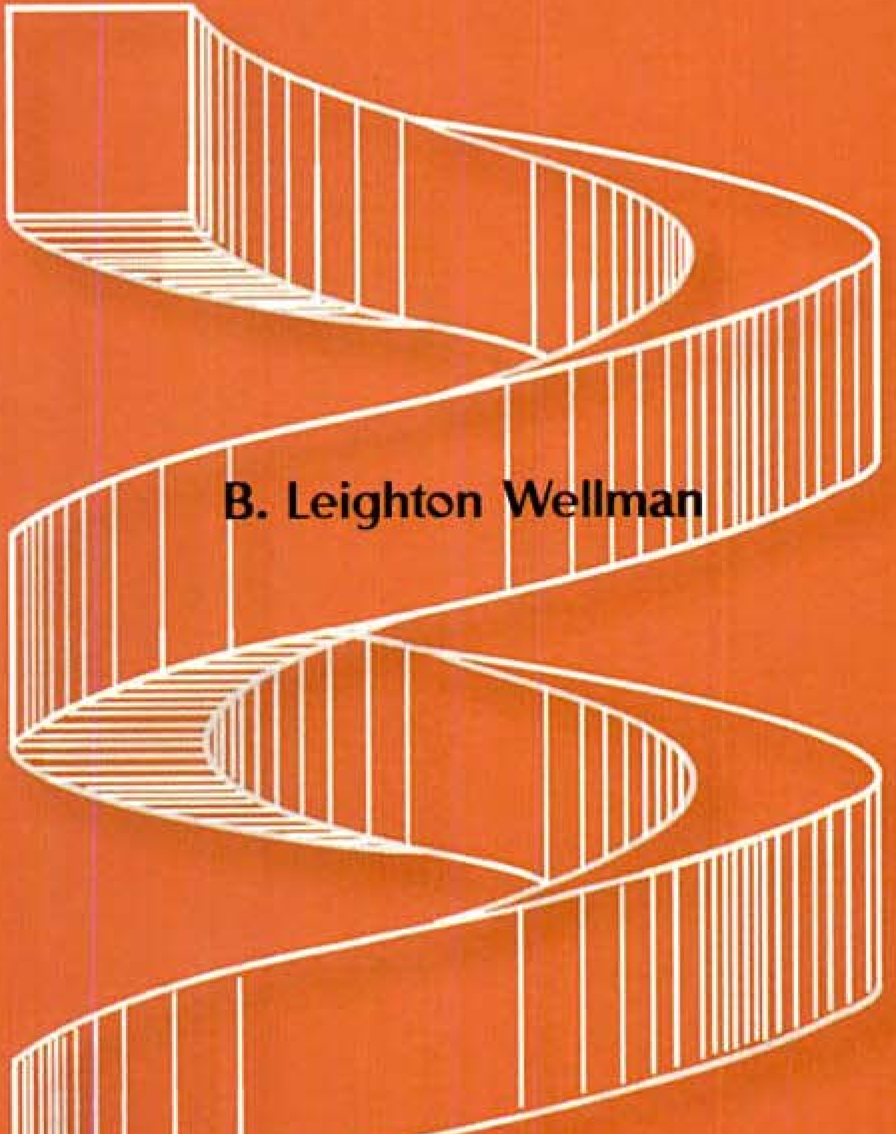
GEOMETRÍA DESCRIPTIVA



B. Leighton Wellman

Editorial Reverté, S. A.

Título de la obra original:
Technical Descriptive Geometry

Edición original en lengua inglesa publicada por:
McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, U.S.A.

Versión española por:
Máximo Conde
Ingeniero

Propiedad de:
EDITORIAL REVERTÉ, S. A.
Loreto, 13-15, Local B
08029 Barcelona
Tel: (34) 93 419 33 36
Fax: (34) 93 419 51 89
E-mail: reverte@reverte.com
Internet: http://www.reverte.com

REIMPRESIÓN: Junio de 2003

Impreso en España - Printed in Spain

ISBN: 84-291-5090-0

Depósito legal: SE-2413-2003

Impresión: Publicaciones Digitales, S.A.
www.publidisa.com – (+34) 95.458.34.25. (Sevilla)

seguros e innegables que le proporcionen; recordará los principios aprendidos y que realmente puede aplicar, y, entonces, siguiendo el razonamiento lógico llegará a la verdadera conclusión.

En esta segunda edición se ha intentado que el texto sea lo más ameno posible. Cada artículo ha sido examinado de nuevo, comprobado, y escrito con la máxima claridad. Para que la referencia sea más fácil, se han puesto los subtítulos en letra negrita, y las ideas claves están concisamente expresadas en letra cursiva, separadas a mayor espacio del texto adjunto. Cada artículo ha sido cuidadosamente estudiado, y los principios más importantes han quedado establecidos en forma de reglas, *no para ser aprendidos de memoria*, sino, más bien, para resumir con el mínimo de palabras posible lo establecido, y para encontrarlos fácilmente cuando los busquemos. En forma semejante se ha establecido el análisis completo de importantes problemas, con un breve resumen. Y en el apéndice se han adicionado algunas construcciones nuevas.

Muchos dibujos han sido incorporados, otros fueron ampliados o simplificados, y también otros fueron completamente dibujados de nuevo. Los dibujos difíciles, o complicados, que requieren una construcción en varias fases, se van indicando las mismas en forma progresiva, en dos o seis dibujos separados. Las ilustraciones gráficas se han empleado libremente, para mostrarnos los conceptos fundamentales. El esquema de notaciones es sencillo y fácil de recordar. Una característica singular es la que los puntos dados se designan con tipo de negritas, para distinguirlos de los puntos solicitados. Y como respuesta a muchas solicitudes, hemos agregado dos nuevos capítulos; que son el uso de estas proyecciones aplicadas a los Vectores, así como aplicaciones a la Geología y a la Minería. Para estos capítulos nuevos se aplican totalmente la teoría y los principios básicos que se establecen en el texto, y son explicados con grabados y ejemplos prácticos específicos. Se han agregado nuevos procedimientos gráficos para la solución de muchos problemas vectoriales, y el principio fundamental de la concurrencia de vectores ha tenido aplicación a ese problema general, que se presenta, de equilibrio en el espacio. Para los problemas de geología, el método corriente de proyecciones auxiliares se ha visto suplementado con otro más corto y sencillo de una sola proyección.

El disponer las diferentes materias en doce capítulos, con temas avanzados al final de cada uno de ellos, permitirá al profesor programar el curso a su deseo, con la amplitud que prefiera, y con la continuidad lógica con que los temas se van exponiendo. El capítulo 1, aunque elemental, es muy importante al ser una especie de introducción a los capítulos siguientes, no debiendo prescindirse de él. Los capítulos 2 al 12, pueden ser expuestos en su totalidad o en parte, según el alcance que tenga el curso y el criterio del profesor. Los capítulos 9 y 10 se pueden explicar como están expuestos, en orden inverso, o alternativamente. Los capítulos 11 y 12 deben ser enseñados, solamente, después de un adecuado estudio sobre los temas del punto, línea y plano, de los capítulos 2 y 5. Los temas más avanzados se pueden dejar para los últimos cursos. Sin embargo, bien se expliquen o no muchos de estos temas, son siempre interesantes y necesarios para los estudiantes más avanzados, y dignos de ser considerados.

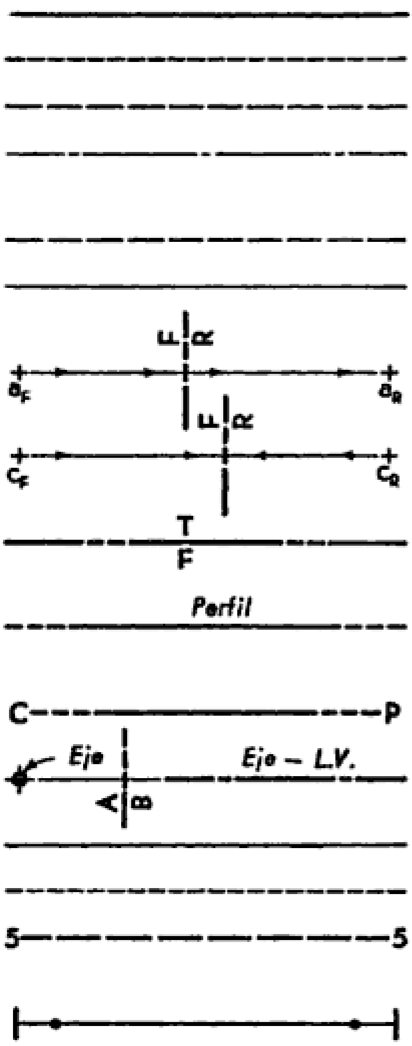
Todos los problemas, dispuestos en grupos, constan al final del libro. Para simplificar las relación entre estos problemas y los dibujos, se han agregado 65 figuras nuevas. Se establecen 1.692 problemas, de los cuales 1.532 están acondicionados a las dimensiones exactas de los datos que constan en sus figuras correspondientes. Los problemas que sólo se pueden resolver gráficamente, se han presentado de ese modo, ahorrando tiempo con esta característica, lo mismo al estudiante que al instructor. Estos problemas han sido cuidadosamente seleccionados, en escala, desde los más sencillos y en su mayoría implican pensamientos originales. Hay problemas suficientes, como para 4 ó 5 años. Las contestaciones numéricas se dan al final de cada problema, como solución, pero si lo deseara el profesor puede variar estos resultados con sólo cambiar un dato inicial.

El autor hace constar su agradecimiento por las valiosas y numerosas indicaciones que ha recibido, de aquellos que enseñaron o estudiaron la primera edición; esa amabilidad y crítica constructiva, han sido sinceramente apreciadas. Se siente especialmente en deuda con el Profesor John M. Coke, por sus sugerencias sobre aplicaciones a la Geología y Minerología; y al Profesor Frank A. Heacock por su revisión al capítulo de Vectores. Y también a su esposa, Marjorie, expresa su reconocimiento, por sus muchas horas de mecanografía y corrección paciente.

B. LEIGHTON WELLMAN.

INDICE DE MATERIAS

CODIGO DE LINEAS Y SIMBOLOS



Líneas visibles del objeto, y líneas requeridas.

Líneas ocultas del objeto.

Línea en posición girada.

Línea central; eje de simetría; ejes de los cuerpos geométricos.

Líneas de construcción; puntos del recorrido del giro.

Unión de paralelas y alineación de puntos en las proyecciones adyacentes (Art. 1·5).

Flechas indicando una construcción en serie: el punto $\mathbf{a}_R$ se obtiene a partir del punto $\mathbf{a}_F$.

Flechas opuestas que indican puntos situados independientemente, verificados por alineación.

Línea de tierra o de referencia, entre proyecciones adyacentes (Art. 2·4).

Proyección de perfil de un plano, de extensión ilimitada (Art. 4·6).

Proyección de perfil de un plano cortante (Art. 4·25).

Eje de revolución, en proyecciones adyacentes (Art. 5·1).

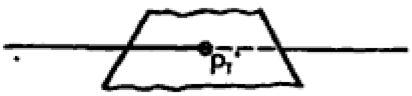
Elemento visible de una superficie (Art. 6·3).

Elemento oculto de una superficie.

Intersección de planos cortantes con los planos de las bases (Art. 9·13).

Línea de abatimiento de un desarrollo (Art. 10·4).

A, B, C, D, E, F, . . etc.	Las letras mayúsculas del texto se refieren a los puntos del espacio (Art. 1·6); las letras minúsculas se refieren a las proyecciones determinadas de esos puntos del espacio.
$\mathbf{a}_T$, $\mathbf{b}_T$, $\mathbf{c}_T$ . . $\mathbf{a}_F$, $\mathbf{b}_F$ . . etc.	Las letras de negritas en las figuras indican los puntos dados; los subíndices expresan la clase de proyección (Art. 1·6).
e_T, f_F, g_R . . x_A, y_B . . etc.	Estas minúsculas, en las figuras, significan puntos solicitados o construidos.
a^R_T, c^R_F, e^R_R . . m^R_A, p^R_B . . etc.	Posiciones de puntos girados.
1 2 3 . . 1' 2' 3' . . 1" 2" 3" . . 1R 2R 3R	Series de puntos localizados por el mismo proceso; se omiten las proyecciones.



Línea que corta una superficie

SIMBOLOS DE CORRECCION PARA EMPLEO DEL PROFESOR

✓	Correcto dentro de límites tolerados.
✓+	Correcto, excediendo ligeramente los límites tolerados.
✓H	Correcto, excediendo un poco el valor correcto.
✓L	Correcto, faltando un poco al valor correcto.
✓++	Método correcto, pero pasa considerablemente los límites tolerados.
X	Incorrecto.
A	Error en la alineación de los puntos de las proyecciones adyacentes.
R	Error en las medidas, tomadas a partir de la línea de referencia, entre las proyecciones anexas.
M	Error debido a una respuesta inexacta de una medida.
LO	Error debido al plantear un problema con los datos dados.
S	Valor dado en la escala y no su distancia en la figura.
WS	Equivocación en la escala empleada.
Q	Respuesta dada que no está de acuerdo con la distancia en la figura.
WV	Equivocación en la clase de proyección.
PV	Mala elección o emplazamiento de las proyecciones.
N	Notación inadecuada. No se han designado puntos, líneas, etc.
V	Línea que debería ser visible.
H	Línea que debería ser oculta.
℄	Centro de línea solicitado.
//	Líneas que deberían ser paralelas.
⊥	Líneas que deberían ser perpendiculares.
⊗	Observar el error evidente dentro del área del círculo.
C	Curva mal trazada.
T	Punto de tangencia inexacto o incorrecto.
D	Dimensiones incorrectas.
I	Resultado inexacto.
Inc	Solución incompleta.
P	Dibujo imperfecto; lápiz romo impropio para el trazado de líneas.
U	Trabajo sucio o mal presentado.

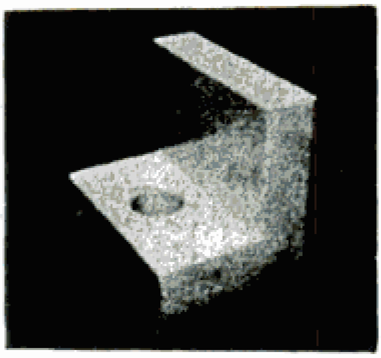


Fig. 1·1. Una fotografía.

1·2. Dibujos gráficos

La figura 1·1 es una fotografía de un objeto sencillo. La cámara, evidentemente, ha sido dirigida hacia un ángulo del objeto, y un poco encima del mismo, para que aparezcan dos lados y las superficies superiores del mismo.

A primera vista dicho objeto es un bloque en forma de L, con un orificio circular en la base de esa L. Se podría también deducir que la parte alejada o posterior parece del mismo tamaño y forma que la cercana y la profundidad del ala izquierda es igual a la de la derecha; y que todos los ángulos son rectos o de esquinas cuadradas.

Estas observaciones son ciertas, pero supongamos que queremos comprobar estas conclusiones, midiendo realmente estas dimensiones sobre la fotografía.

La figura 1·2 muestra la misma fotografía medida con escalas reales, por el frente y parte posterior del objeto. La anchura de la parte posterior, que creíamos era la misma que la frontal, evidentemente aparece más corta. Medidas similares de otras distancias, que aparentemente son iguales en ese objeto, dan el mismo resultado, se descubre que las distancias más cortas son siempre las más alejadas de la máquina fotográfica. Esta reducción de tamaño, en distancias que son iguales, es originada por el hecho de que los bordes del objeto, que realmente son paralelos, no cumplen esta condición en la fotografía. Esto está demostrado convincentemente en la figura 1·2, observando las líneas de trazos. Cuando los bordes del objeto se prolongan en líneas rectas, éstas no son paralelas, sino que convergen en un punto. Las líneas horizontales paralelas a la profundidad convergen, al prolongarse, en el punto *A* de la izquierda; mientras que las líneas horizontales paralelas al lado frontal convergen en un

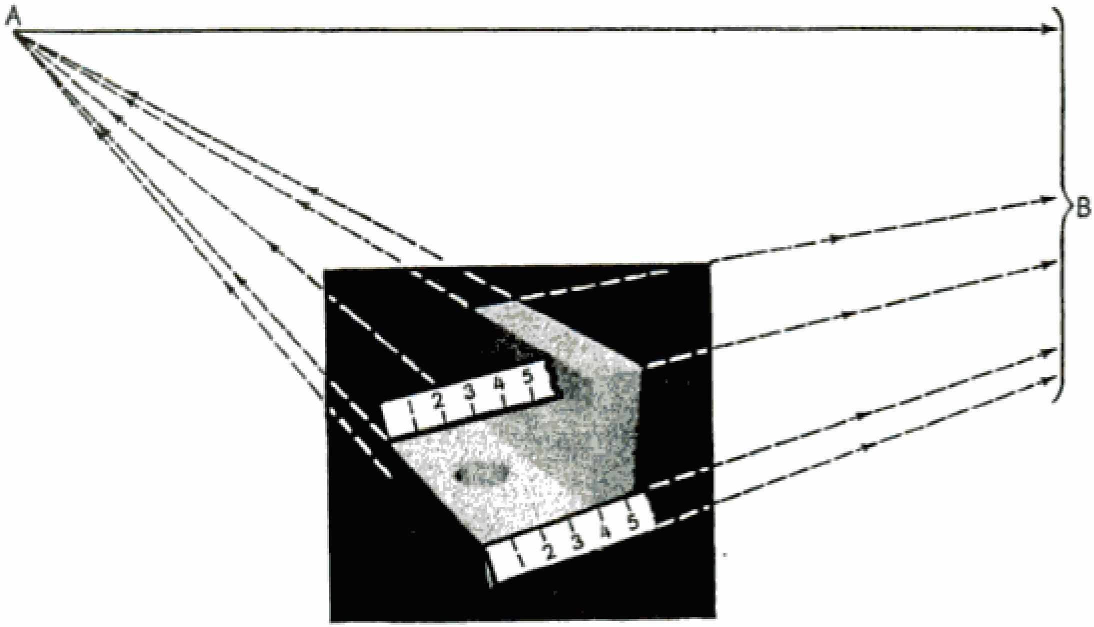


Fig. 1·2. Mediciones sobre la fotografía.

fieles al representar ciertas distancias, teniendo la ventaja de su fácil construcción.

En cada uno de los dibujos antes considerados, el objeto está colocado delante del observador, en una posición tal que le permita ver simultáneamente tres planos, o vistas, de ese objeto. Pero es evidente ahora que, en cada caso, algunas de las líneas del objeto han sido deformadas, y pudiera por ello pensarse que con un cambio de posición del objeto pudieran conseguirse mejores resultados. La figura 1·6 nos muestra al mismo objeto, como si apareciera en perspectiva, desde otras tres posiciones o puntos de vista. En cada caso el objeto ha sido elevado, hasta que la superficie horizontal intermedia esté ahora, exactamente, al mismo nivel del ojo del observador. En la figura 1·6(*b*) el objeto ha sido alzado hasta el nivel del ojo, desde su primera posición, pero sin girar. Una línea recta, trazada horizontalmente desde el ojo del observador al objeto, daría en el vértice *A* indicado. Esta *línea visual* imaginaria se representa en la figura 1·6(*a*) con una flecha.

Esta nueva posición, vista en la figura 1·6(*b*), da un dibujo del objeto completamente diferente. La superficie superior, que está ahora encima del nivel del ojo, no puede ser vista, ni tampoco la superficie inferior que está más abajo de ese nivel; en cambio la superficie horizontal intermedia, que está exactamente al citado nivel, se representa como una línea recta, al ser vista de canto. Las superficies frontales y laterales quedan oblicuas con la línea visual, quedando deformadas las distancias reales que estén sobre estas superficies. La existencia del orificio no se hace visible.

Si conservamos al objeto al mismo nivel, pero girándolo hacia la derecha, las superficies frontales pueden traerse directamente enfrente del ojo, como en la figura 1·6(*c*). La línea visual es perpendicular ahora a las superficies frontales, representándose con la flecha *B*. Desgraciadamente, la forma en L, distintiva del objeto, ya no se aprecia, y también sigue invisible el orificio. En realidad, un objeto así dibujado se hace desconocido. Sin embargo, algo se ha conseguido; las dos superficies frontales rectangulares del objeto aparecen, sin deformación, en el dibujo, y las líneas trazadas en las mismas conservan su longitud. Una excepción evidente, entre estas dos superficies frontales, es que el ancho de la superficie posterior aparece más pequeño que el ancho de la superficie delantera, teniendo en realidad la misma anchura: ello es debido, como ya

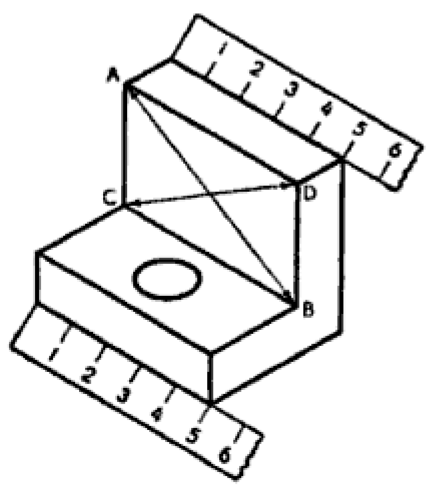


Fig. 1·4. Un dibujo isométrico.

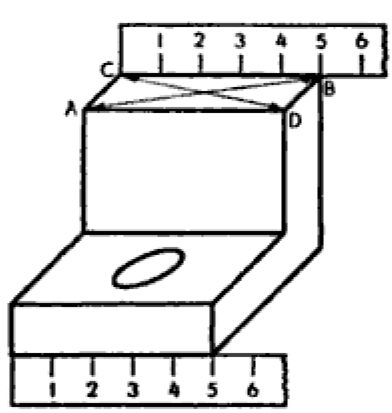


Fig. 1·5. Un dibujo oblicuo.

se dijo, a que la superficie posterior está más alejada del ojo que la inmediata, y de ahí que aparezca con más reducido tamaño. El dibujo tiene una apariencia completamente plana, porque la dimensión de profundidad falta ahora por completo.

Si el objeto se gira hacia la izquierda, en vez de hacerlo hacia la derecha, entonces la superficie lateral derecha se coloca directamente delante del ojo, de manera que la línea visual incida en el objeto en el punto *C*. La figura 1·6(*d*) nos indica que la superficie lateral derecha aparece en su verdadera forma y es evidente que la profundidad parece muy corta.

Para sintetizar el estudio completo de los dibujos reseñados podemos deducir:

1. La figura 1·3 nos proporciona la descripción más real del objeto, pero también nos acarrea las mayores deformaciones en las distancias.
2. Las figuras 1·4 y 1·5 dan del objeto una representación adecuada, pero imaginaria, proporcionando algunas distancias en su verdadera longitud.
3. Las figuras 1·6(*c*) y (*d*) facilitan incompletas representaciones del objeto, mas nos revelan también muchas distancias y superficies reales.

Se dijo en el artículo 1·1, que lo primordial de un dibujo de ingeniería es suministrar una representación exacta del objeto, en su forma y dimensiones. Se ha demostrado que no existe ningún dibujo sencillo que nos exponga un objeto con sus tres dimensiones —longitud, altura y profundidad— sin deformaciones, o en su forma o en sus dimensiones. Por esta razón los dibujos de ingeniería

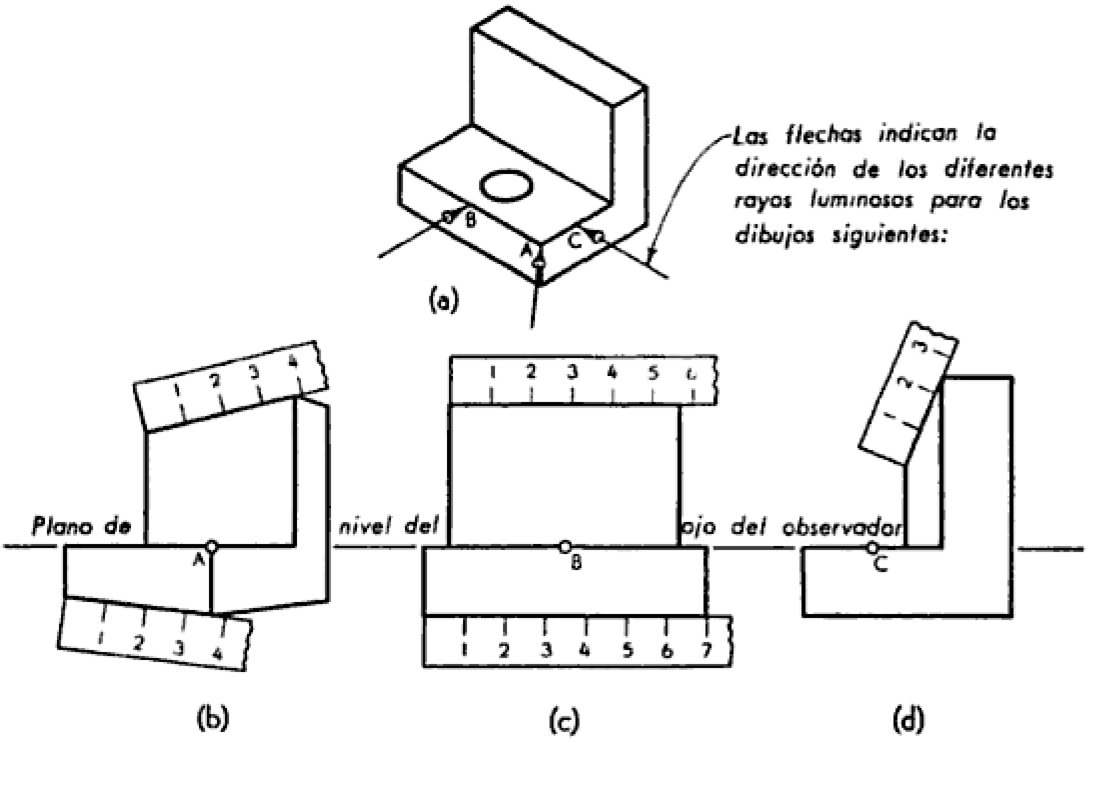


Fig. 1·6. Dibujos de perspectivas en otras posiciones.

siempre comprenden *dos o más* proyecciones (o planos) y de ahí que se les denomine *dibujos de planos o proyecciones múltiples.*

1·3. Las proyecciones principales

Cuando el objeto indicado en la figura 1·6(*a*) era visto directamente de frente, desde un punto de vista incidente en *B*, se obtenía el dibujo de la figura 1·6(*c*). Si suponemos que el observador está alejado a una distancia infinita del objeto, entonces todas las líneas visuales horizontales serían exactamente paralelas, como se observa en la figura 1·7(*a*). En estas condiciones las distancias desde el observador al frente y parte posterior del objeto serían prácticamente iguales, no apreciándose por ello la reducción del tamaño del objeto con la distancia. Así lo vemos como se muestra de frente, en la figura 1·7(*b*). Las superficies frontales o inmediatas del objeto, que en esta ocasión son perpendiculares a las líneas visuales horizontales, se manifiestan en su verdadera forma y tamaño, habiendo desaparecido completamente la dimensión de profundidad. Esta es la *proyección vertical* del objeto, o *plano o perfil.*

De la misma manera, si el observador, desde el infinito, mira horizontalmente en una dirección perpendicular al lado derecho del objeto resultaría el plano de la figura 1·7(*c*). En este caso el lado derecho está en su verdadera magnitud, pero ha desaparecido la dimensión de longitud, por ser paralela a las líneas visuales horizontales. Esta es la *proyección lateral derecha* del mismo objeto, o *corte por un plano transversal.*

Una tercera proyección [fig. 1·7(*d*)] se puede obtener, mirando desde una altura infinita perpendicularmente al objeto. Es notable señalar de nuevo que una dimensión, en este caso la altura, ha desaparecido. Esta es la *proyección horizontal* del objeto, o *planta.*

Estas tres proyecciones logradas por la visión del objeto desde tres direcciones mutuamente perpendiculares, se llaman *proyecciones principales*. Nótense las siguientes e importantes observaciones referentes a las mismas:

1. Para una proyección dada, las superficies que son perpendiculares a las líneas visuales se representan en su verdadera magnitud y forma.
2. Los rayos visuales de las tres proyecciones son perpendiculares entre sí.
3. Cada plano muestra solamente dos de las tres dimensiones del objeto.
4. Tomando en conjunto los tres planos, tendremos la descripción completa del objeto.

Las consideraciones siguientes indicarán el porqué son importantes los cuatro puntos arriba mencionados. Dado un objeto, que tenga que ser descrito con las tres proyecciones principales, el dibujante debe primeramente decidir la dirección de la línea visual para cada proyección. El dibujante, que es el primer interesado en presentar al objeto con la mayor cantidad posible de superficies en su verdadero tamaño, ha de seleccionar las direcciones de las visuales perpendiculares a las principales superficies de ese cuerpo. No debe olvidar, sin embargo, que las tres direcciones seleccionadas deben ser mutuamente perpendiculares. Esta es una condición esencial, ya que cada plano debe descubrir solamente dos de las tres dimensiones. Por ejemplo, el alzado indicado en la figura 1·7(*b*), nos da la altura *H* y la longitud *L*, no así la profundidad *D*, por ser las líneas visuales paralelas a esa profundidad. En la figura 1·7(*c*), vista del lado derecho, solamente aparecen la altura *H* y la profundidad *D*, ya que las líneas visuales son paralelas a la longitud y además perpendiculares a las otras lineas visuales frontales. La cuarta consideración, arriba mencionada, es una consecuencia lógica de las tres primeras, al no existir objeto tridimensional que se pueda describir completamente sólo con dos dimensiones.

1·4. Coordinación de las proyecciones

Se ha demostrado que las proyecciones principales proporcionan un medio exacto de forma descriptiva, y también que dos o más proyecciones son necesarias para una descripción completa de un objeto dado. En la figura 1·7 cada una de las tres proyecciones ha sido designada para indicar desde qué dirección la proyección fue tomada. Esta denominación de las proyecciones podria no ser necesaria, si estuviesen siempre dibujados en una posición lógica previamente establecida.

En la figura 1·8, las tres proyecciones principales han sido dispuestas de acuerdo con la práctica normal de los Estados Unidos y del Canadá. La planta se coloca directamente sobre el perfil, y el plano transversal a la derecha de esa proyección vertical. No solamente es una colocación lógica y natural de las proyecciones, sino que también las dimensiones semejantes son comunes para cada dos proyecciones. La longitud *L* del objeto, aparece en la planta y en el perfil; por eso estas longitudes iguales son comunes en las proyecciones alineadas representadas en la figura 1·8. La altura *H* es la misma si el objeto se observa de frente o de costado, quedando esta igualdad manifiesta al que-

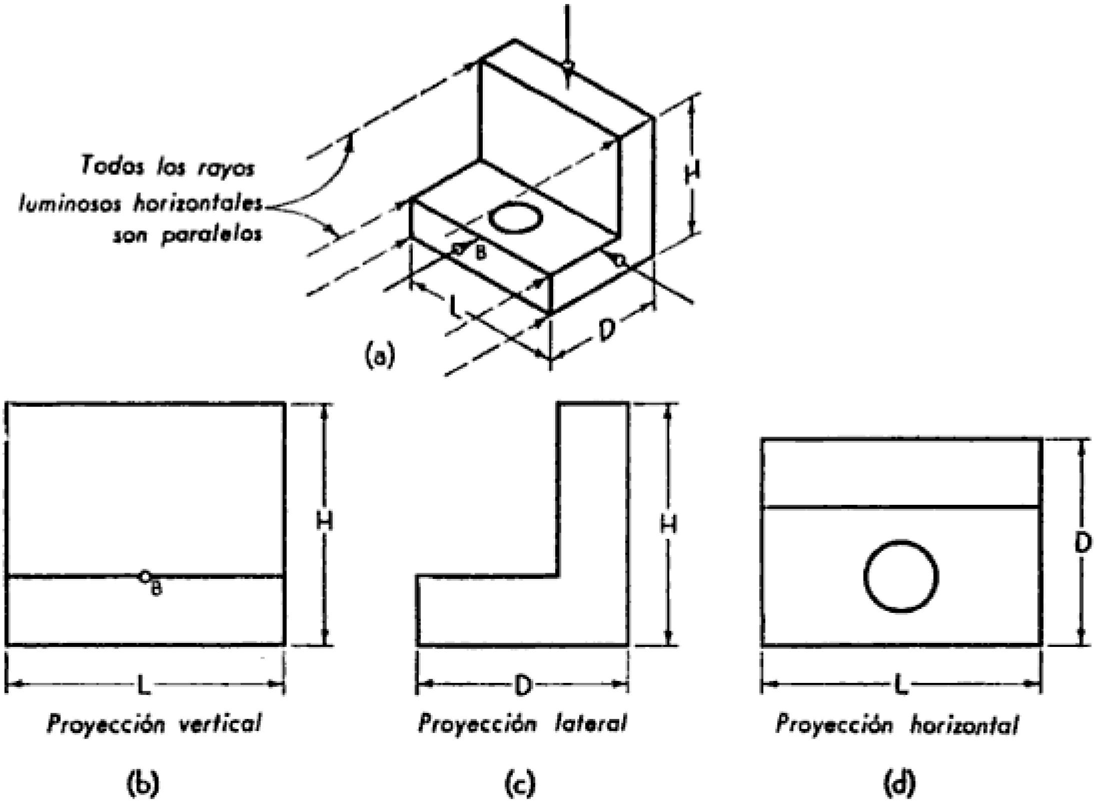


Fig. 1·7. Proyecciones principales del objeto.

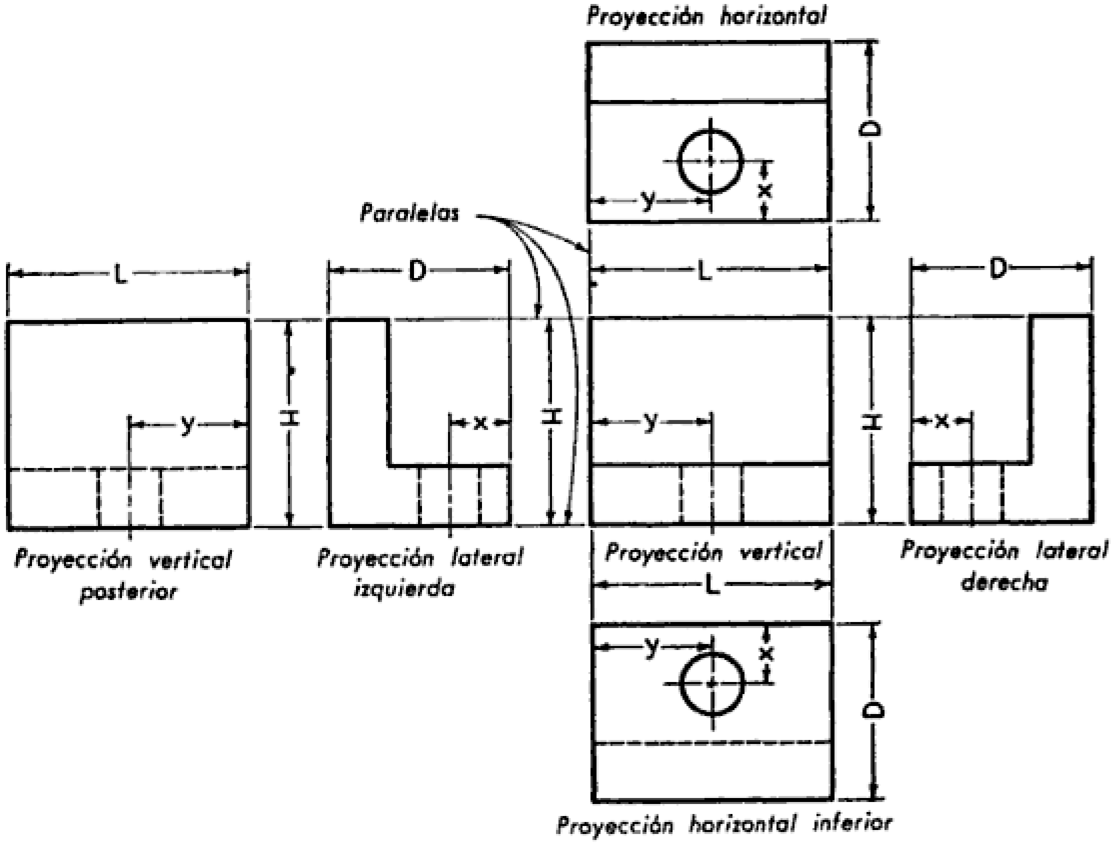


Fig. 1·10. Colocación común americana para las seis proyecciones principales.

y completamente, las dimensiones y la forma de un objeto, sin embargo, el número de las proyecciones empleadas, para mayor claridad y sencillez, debería ser el mínimo. El examen de los seis planos de la figura 1·10 nos demuestra que hay repeticiones. Las vistas de lado derecho e izquierdo son idénticas, aunque invertidas y una sería suficiente; la derecha es preferible corrientemente. Las proyecciones horizontales superior e inferior, difieren solamente en visibilidad y posición invertida; lo que también sucede con los planos delantero y posterior. Ya que los dibujantes prefieren las proyecciones con un mínimo de líneas ocultas, podrían descartarse los planos posterior e inferior. Así, aunque las seis proyecciones puedan dibujarse, en este caso tres son evidentemente innecesarias, conservándose los tres planos que originalmente se trazaron en la figura 1·8.

En ciertas circunstancias dos proyecciones pueden ser suficientes, pero debemos tener cuidado en la selección de esas dos proyecciones, para evitar ambigüedades. Por ejemplo, la figura 1·11 *(a)* únicamente contiene las proyecciones horizontal y vertical de la figura 1·8. Estas dos proyecciones no son suficientes, ya que podrían representar el primer objeto u otro de los dos que se indican a la derecha de la figura 1·11 en *(b)* y *(c)*.

Si el cuerpo indicado en la figura 1·8 gira a su alrededor, de manera que el lado izquierdo quede de frente, tendremos entonces que los planos horizontal y vertical que vemos en la figura 1·12*(a)* pueden describir completamente al objeto sin que se confunda éste con cualquiera de los otros indicados en las figuras 1·11*(b)* y *(c)*. Las figuras 1·12*(b)* y *(c)* representan las proyecciones horizontales y verticales de estos objetos tomados para comparación.

REGLA 1.ª REGLA DE PERPENDICULARIDAD. *Las líneas o rayos visuales para dos cualesquiera proyecciones adyacentes deben ser perpendiculares.*

REGLA 2.ª REGLA DE ALINEACIÓN. *Cualquier punto de un objeto, en una proyección, debe estar alineado por una paralela, con el punto correspondiente directamente opuesto de cualquier proyección adyacente.*

REGLA 3.ª REGLA DE SIMILARIDAD. *En todas las proyecciones anexas la distancia entre dos puntos similares del objeto debe ser la misma, medida en las paralelas.*

La regla 1.ª establece una condición importante y necesaria según ha sido ya demostrado en el artículo 1·3. La coordinación de las proyecciones, establecida en el artículo 1·4, indica que la regla 2.ª establece una condición muy necesaria. Refiriéndonos a la figura 1·10, explicaremos la aplicación de la regla 3.ª para las proyecciones anexas. Consideramos la posición del orificio en las proyecciones horizontales superior e inferior y laterales derecha e izquierda. La horizontal superior indica que el centro del orificio está situado a una distancia x de la superficie frontal del objeto. Puesto que la distancia x está medida en la dirección de las paralelas que unen las proyecciones horizontal y vertical, que son adyacentes, de acuerdo con la regla 3.ª, debe aparecer también la distancia x, similar-

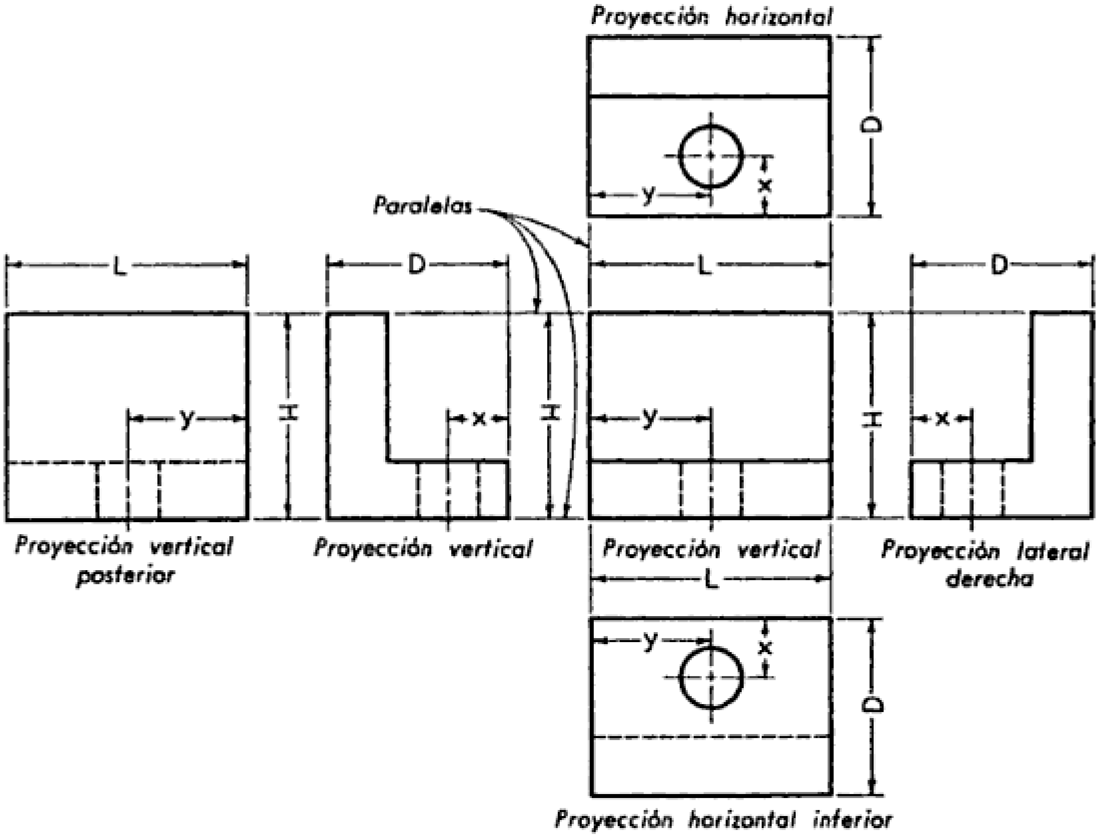


Fig. 1·10. (Repetida) Colocación común americana para las seis proyecciones principales.

mente, en todas las proyecciones anexas con la horizontal superior. La comparación de las cuatro proyecciones anexas a esa horizontal, y adyacentes con ella, prueban que ello es cierto. Debe observarse que las distancias, tales como la x, debe siempre ser medida en dirección de las paralelas.

La distancia y, indicada en la proyección superior de la figura 1·10, debe evidentemente concordar con la distancia y de las proyecciones vertical e inferior por alineación de estas vistas (regla 2.ª)

Asimismo, la distancia y, que aparece en la proyección vertical, tiene también que figurar similarmente en la proyección posterior, por ser ambas proyecciones anexas (regla 3.ª).

La figura 1·13 nos indica un error corriente en la construcción de proyecciones anexas. Aquí la proyección lateral derecha ha sido dibujada incorrectamente en una posición invertida. Este error podrá ser evitado si observamos que la superficie *frontal* del objeto debe estar siempre *hacia el frente* en cada proyección anexa.

1·6. Proyecciones principales de una línea recta

A fin de interpretar o leer un dibujo de múltiples proyecciones, es necesario analizar y comparar éstas, estudiando al objeto no sólo como un elemento global, sino que también determinando las líneas y superficies que lo componen. Ya que todos los cuerpos están limitados por superficies, y todas las superficies por líneas, empecemos por considerar las proyecciones principales de una sencilla línea recta, y más tarde, las proyecciones principales de una elemental superficie plana.

La posición de una línea recta en el espacio, se puede describir representándola en cada una de las proyecciones principales; y su longitud se puede indicar designando los dos puntos de sus extremidades. En la figura 1·14 se representan las *siete* posiciones típicas de la línea AB. Las letras mayúsculas A y B se refieren a la línea real en el *espacio;* las letras minúsculas a y b se emplean para designar los mismos puntos tal como aparecen en cada una de las *proyecciones.* Y para mayor claridad, además, la proyección horizontal del punto A se la designa por a_T la vertical por a_F y la lateral derecha por a_R

Las situaciones diferentes de la línea AB, en la figura 1·14, han sido clasificadas como vertical, horizontal e inclinada. La línea vertical es única por su definición, pues la palabra «vertical» tiene solamente un significado: «perpendicular a la superficie de la tierra». Puesto que el extremo superior de una línea vertical está encima exactamente del extremo inferior, esta línea aparecerá en la proyección horizontal como un circulito o punto. Tenemos que referirnos a la proyección vertical o lateral para ver que, en este caso, A es el extremo superior de la línea.

Una línea horizontal tiene todos sus puntos a la misma altura o elevación. En la figura 1·14 (2), (3) y (4) una fina línea de trazos se ha dibujado horizontalmente a través de las proyecciones vertical y lateral, para indicar que los puntos a_F y b_F, y los a_R y b_R están al mismo nivel o altura, en estas vistas. De ese modo una línea puede quedar identificada como horizontal por esta característica aunque la línea pueda aparecer en la proyección horizontal en una variedad de posiciones. Las posiciones indicadas en (2) y en (3) son especiales, originando que aparezca como un punto en la proyección vertical (2) y en la lateral (3). La posición manifestada en (4) es la de una línea que, aunque horizontal, forma un ángulo α con la superficie vertical manifestado en la proyección horizontal.

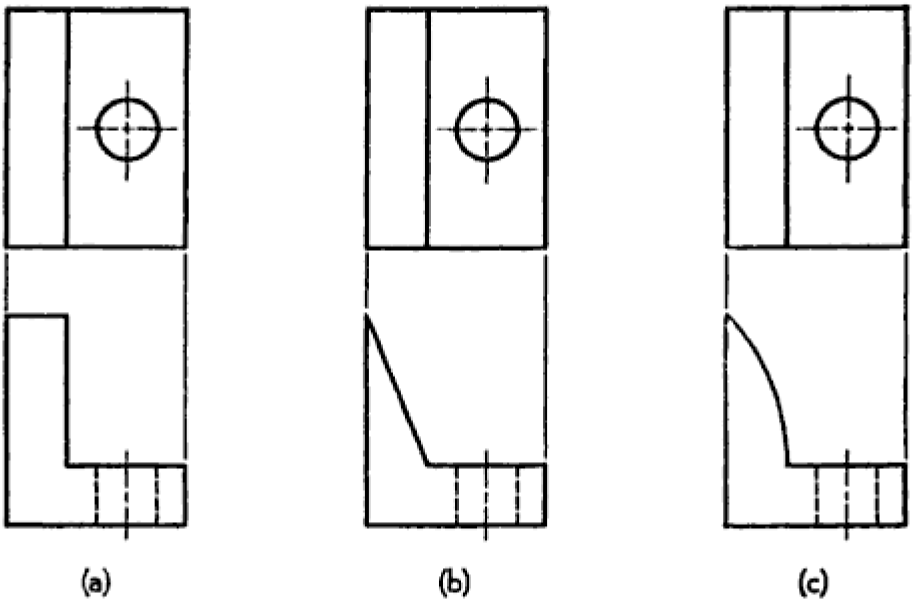


Fig. 1·12. Elección de proyecciones para evitar la ambigüedad.

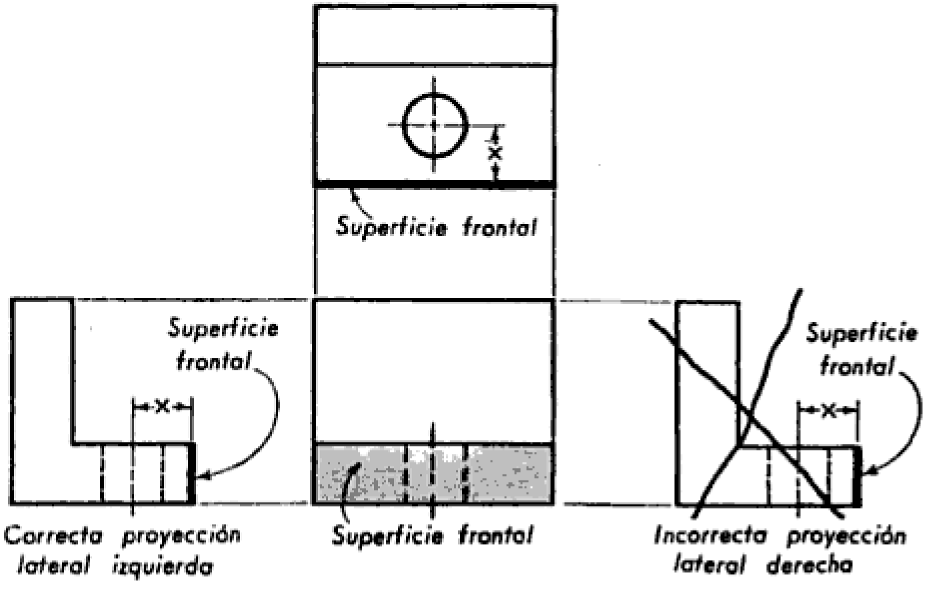


Fig. 1·13. Colocaciones correcta e incorrecta de proyecciones anexas.

Una linea inclinada tiene un extremo más alto que el otro. De nuevo se ha dibujado, horizontalmente, una delgada línea de trazos a través de las proyecciones verticales y laterales de cada una de las tres lineas inclinadas que se ven en la figura 1·14 para hacer notar que, en todos los casos, el punto a_F es más alto que el punto b_F y que el punto a_R es también más elevado que el b_R. Así las líneas que están inclinadas pueden reconocerse, como tales, solamente en los planos verticales o laterales, y en la proyección horizontal esta línea inclinada puede figurar en varias situaciones. Las posiciones (5) y (6) son especiales, pero la de la linea inclinada que se muestra en (7) es el caso más corriente, cuando forma los ángulos α con el plano vertical y β con el plano horizontal; todo de acuerdo con las reglas dadas en el artículo 1·5.

Debería advertirse que las proyecciones horizontal, vertical y lateral de cada una de las siete líneas dibujadas en la figura 1·14, han sido realizadas según las reglas dadas en el artículo 1·5. El punto a_F está siempre inmediatamente debajo de a_T y directamente alineado con el adyacente a_R (regla 2.ª de alineación). La

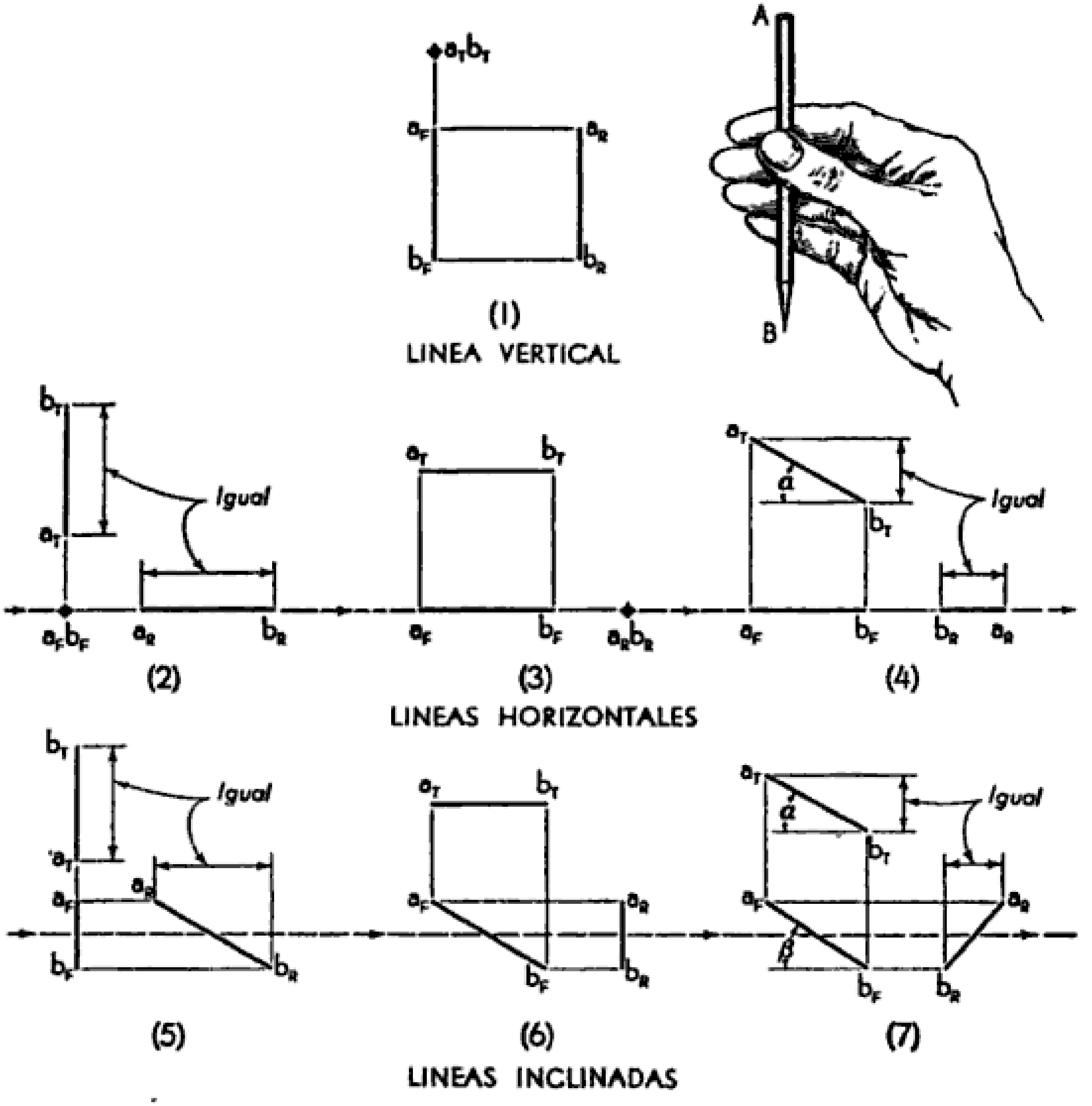


Fig. 1·14. Las siete posiciones típicas de una línea recta.

figura era un cuadrado, un rectángulo, o un paralelogramo; pero evidentemente, no aparecía nunca como un triángulo u otra figura de tres lados. Estas observaciones pueden ser evidentes por sí mismas, pero han constituido el fundamento para la siguiente regla, de gran utilidad:

Regla 4.ª. Regla de la configuración. *Cada superficie plana, cualquiera que sea su forma, aparecerá siempre o como una recta o como una figura de configuración similar.*

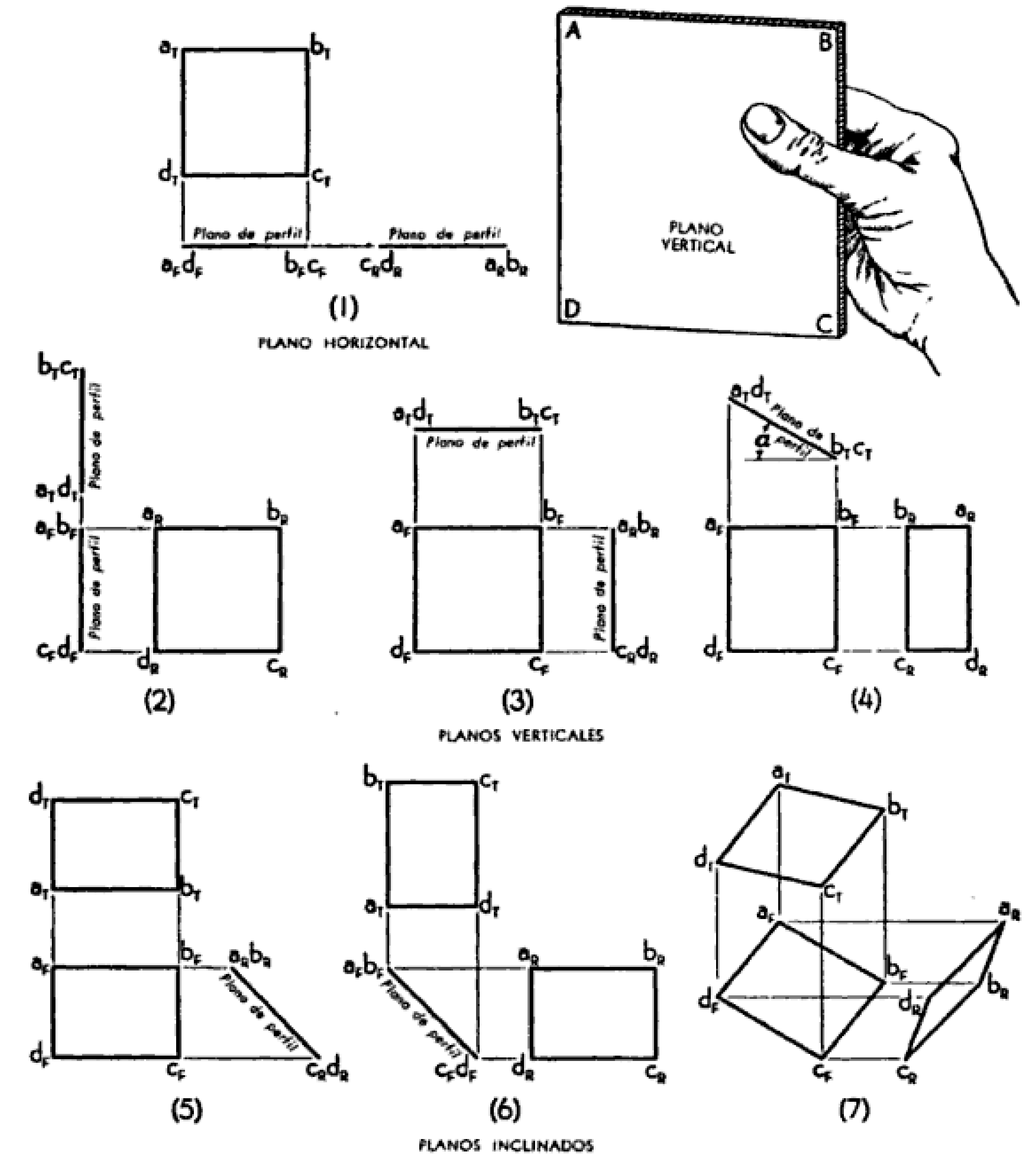


Fig. 1·15. Las siete posiciones típicas de una superficie plana.

ces el dibujante o el técnico tiene que analizar todos esos planos, para desarrollar un dibujo mental del objeto descrito por esas proyecciones. El principiante observa, asombrado, la rapidez con la que el dibujante experimentado sabe leer o interpretar las proyecciones y deduce frecuentemente que es el resultado de algún «Don» especial de la intuición. Realmente, como el que lee los temas principales de una partitura musical, es una consecuencia del razonamiento lógico, del pensamiento ordenado, y sobre todo, el resultado de la práctica. Vamos a considerar ahora los principios generales y los métodos específicos que se emplean en la lectura de los dibujos de múltiples planos.

Una página llena de diversos temas impresos no puede ser comprendida con una sola ojeada, debemos leer palabra a palabra, y frase por frase, en ordenado método. Similarmente, un dibujo complejo debe ser leído por medio de un examen metódico, de todos los elementos componentes, y toda clase de detalles, examinando los cuerpos geométricos, que representan los objetos, las superficies planas y curvas que limitan estos objetos sólidos, así como las líneas que limitan las superficies. El tiempo con que estos detalles tienen que ser analizados depende, desde luego, de la forma del objeto. Algunos de los objetos más sencillos son, sin embargo, los más difíciles para visualizarlos correctamente. Los casos siguientes nos indican los métodos de análisis.

1·9. Análisis de los cuerpos

La figura 1·17 muestra las tres proyecciones principales de un objeto que puede ser fácilmente analizado examinando las formas del sólido geométrico que representa. Una inspección general de estas proyecciones nos aporta las siguientes consecuencias importantes:

1. Visto el objeto en su proyección horizontal es rectangular. Sobre esta superficie rectangular, *A*, aparecen visibles tres áreas circulares *B*, *C* y *D*. Al extremo derecho y al frente, el conjunto de líneas de trazos *E*, demuestra que hay algo oculto debajo de la superficie rectangular *A*.
2. El cuerpo visto en su proyección vertical, muestra tres áreas rectangulares visibles *F*, *G* y *H*. La *F* está situada sobre la *G* y la *H* debajo. Hay varias líneas de trazos, que indican la existencia de otros elementos detrás de las áreas *F*, *G* y *H*.
3. La proyección lateral muestra cuatro áreas visibles *J*, *K*, *L* y *M*. El área *L* es semicircular; *J* y *K* son rectangulares y *M* es circular. También aquí los elementos invisibles se han indicado con líneas de trazos.

Habiendo ya inspeccionado cada proyección, de un modo general, debemos comparar estos planos entre sí, comprobando particularmente la alineación de las áreas de una proyección con aquellas que le son adyacentes. Para facilitar esta comparación, han sido trazadas paralelas con trazo fino, entre estas proyecciones adyacentes. De la comparación entre las diversas áreas y sus características, deducimos lo siguiente:

1. El área *A*, de la proyección horizontal, comprende desde el extremo izquierdo al derecho y por lo tanto puede alinearse solamente con el área *G* de la proyección vertical. Pero el área *G* está directamente enfrentada con el área rectangular *K*. Por esto deducimos que estas superficies *A*, *G* y *K*, son las proyecciones horizontal, vertical y lateral de un prisma rectangular, que constituye la parte principal del objeto.
2. La superficie *F*, del plano vertical, ocupa la parte principal del objeto, por lo cual deberá ser visible en la vista en planta. Esto se confirma por el hecho de que la superficie circular *C*, visible, coincide con la superficie *F*. En

su consecuencia, esta proyección horizontal del objeto debe ser un círculo. La superficie *J* representa este cilindro (cuando se le ve desde el lado derecho).

3. La superficie *H* de la vista vertical, ocupa la parte inferior de ese objeto y por ello debe ser invisible en la proyección horizontal. Esto se confirma por las líneas de trazos *E* que están directamente encima de la superficie *H*. Las formas rectangulares de las superficies *E* y *H* podrían engañarnos y hacernos creer que se trata de un cuerpo rectangular, pero al observar en la proyección lateral, la superficie *L*, directamente opuesta a la *H*, se ve que se trata de un elemento semicircular.

Al llegar a este punto, con las tres proyecciones, el lector empieza a formar, en su imaginación, el contorno general del objeto. Imaginará una pieza rectangular; con un cilindro sobre su extremo izquierdo; y en el extremo inferior frontal derecho, formando la pieza misma, un borde semicircular. Y a este objeto, así imaginado, se le pueden agregar otros detalles, uno a uno, como los siguientes:

4. El pequeño círculo *B*, de la proyección horizontal, está unido directamente por las líneas de trazos con la superficie *F*, de la proyección vertical; por ello debe tratarse de un hueco circular en el centro del cilindro. Solamente en las proyecciones vertical y lateral se puede medir la profundidad que tiene este hueco.

5. Las líneas de trazos de la vista vertical, que se corresponden con el círculo *D*, de la horizontal, demuestran que se trata de un orificio circular, practicado en el prisma rectangular, que traspasa completamente a esta pieza prismática, desde arriba hasta abajo. Las líneas similares, en la superficie *K*, de la vista lateral, indican el mismo orificio.

6. El área circular *M*, de la proyección lateral, queda identificado en forma semejante, como un orificio circular que cruza a través del semicírculo *L, H, E*.

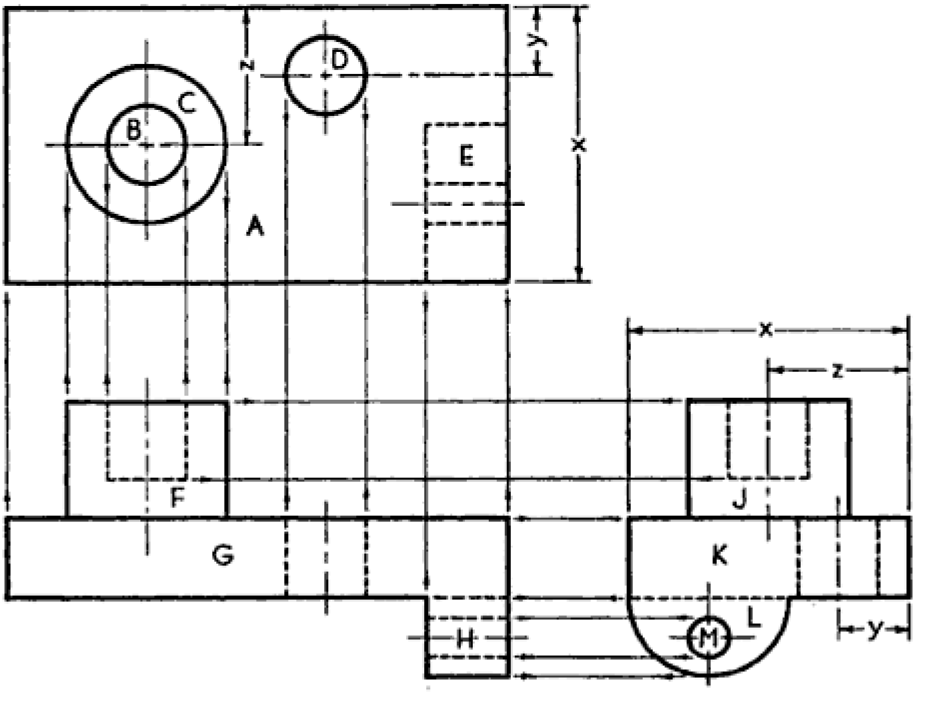


Fig. 1·17. Objeto para ser analizado en sus elementos.

El lector puede tener ya una clara representación mental del objeto completo y refiriéndonos a la figura A. 30, del Apéndice, podrá comparar el objeto que se ha figurado con el dibujo real del mismo objeto.

En el análisis, arriba reseñado, se ha obtenido la imagen de figura completa observando simplemente la regla de alineación, entre las proyecciones horizontal y vertical y entre ésta vertical y la lateral (regla de alineación del artículo 1·5). Y aunque no es necesario para este análisis, la regla de similaridad también se puede aplicar. Obsérvese que las distancias x, y y z, de la proyección horizontal, deben ser exactamente iguales a esas mismas distancias en la proyección lateral.

1·10. Análisis por superficies

En la figura 1·17 los distintos elementos del objeto estaban, favorablemente, dispuestos de manera que siempre hubiera una superficie en cualquier proyección alineada con otra superficie de las dos proyecciones adyacentes. Cuando esto no suceda es conveniente considerar, separadamente, las superficies que limitan los objetos sólidos. La figura 1·18 representa un objeto sencillo, que nos aclarará este método. Al no existir líneas curvas en ninguna de las tres proyecciones el objeto debe estar limitado solamente por superficies planas. Entonces las tres superficies *A*, *B*, y *C* de la proyección horizontal representan tres superficies visibles planas rectangulares y cada una de estas tres superficies es adyacente o contigua a cada una de las otras dos que están colocadas en diferentes planos. Si las áreas *B* y *C* estuviesen en el mismo plano no existiría entre ellas ninguna línea divisoria. Por esto se puede sentar la siguiente regla:

REGLA 5. REGLA DE ÁREAS CONTIGUAS. *Dos áreas que aparezcan contiguas no pueden estar en el mismo plano.*

Por lo tanto, según esta regla, las áreas *D* y *E*, de la proyección vertical, deben permanecer en planos diferentes y lo mismo tiene que suceder para las áreas *F* y *G* de la proyección lateral.

Para facilitar este examen, se indica en la figura 1·19 solamente las proyecciones horizontal y vertical de la figura 1·18, pero con las áreas visibles en

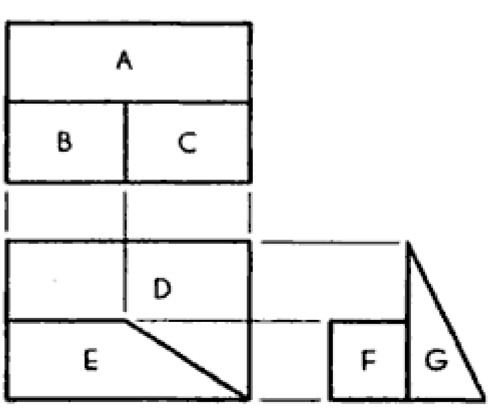


Fig. 1·18. Objeto para ser analizado según sus superficies.

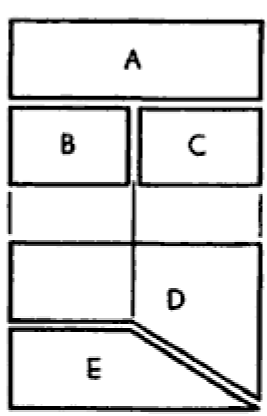


Fig. 1·19. Proyección horizontal y vertical con áreas separadas.

cada proyección separadas ligeramente para acentuar su individualidad. Comparando los dos planos es evidente que la superficie *A* corresponde por alineación, con la *D* o con la *E*. Pero por la regla 4, la forma del área *A* no es en absoluto semejante a las áreas *D* y *E*; el área *A* es de un cuadrilátero, el área *D* es de un pentágono; el área *A* tiene los lados paralelos y el área de *E* es de forma trapezoidal. Por lo tanto el área *A*, de la proyección horizontal, no puede ser la proyección de la superficie *D* ni de la *E*. Las áreas *B* y *C* tampoco están alineadas ni con *D* ni con *E*; es decir, que no son de similar configuración. De estas observaciones se pueden deducir las siguientes conclusiones lógicas:

1. Las áreas *D* y *E* deben representar superficies que aparecen *de canto* en la proyección horizontal. Por ello son superficies *verticales*.
2. Las áreas *A*, *B* y *C* deben representar superficies que aparecen de perfil en la proyección vertical.

Pero para sentar una conclusión final, las consideraciones indicadas deben reservarse hasta que se haya considerado la proyección lateral; y debemos recordar, además, que hemos estudiado solamente las superficies visibles de cada proyección.

En la figura 1-20 las áreas visibles de las proyecciones vertical y lateral, han sido separadas ligeramente sin que por esto se impida apreciablemente una correcta alineación. Fijándonos solamente en la alineación, el área *D* tiene la misma altura que el área *G*, con la que está alineada directamente. Y lo mismo sucede con las áreas *E* y *F*. Pero las áreas *D* y *E* no pueden ser, respectivamente, las proyecciones verticales de las superficies *G* y *F*; el motivo es que estas áreas alineadas no tienen similar configuración. A las dos conclusiones, ya enumeradas, podemos agregar estas otras dos:

3. Las áreas *D* y *E* representan superficies que aparecen *de canto* en la proyección lateral.
4. Las áreas *F* y *G* representan, asimismo, superficies que aparecen *de perfil* en la proyección vertical.

Desde que se estableció que, la mayoría de las áreas indicadas tienen que aparecer como líneas en las proyecciones adyacentes, nos queda solamente poder identificar correctamente a esas líneas que representan superficies. Por ejemplo, las superficies *D* y *E*, visibles sólo en la proyección vertical, son superficies verticales (1.ª conclusión), y aparecen como líneas en la proyección lateral (3.ª conclusión); las líneas verticales gruesas designadas por *D* y *E*, en

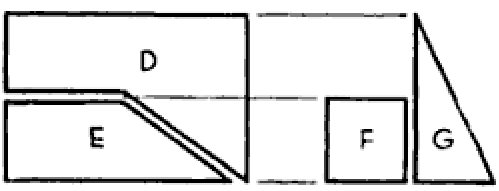


Fig. 1-20. Proyecciones vertical y lateral con las áreas separadas.

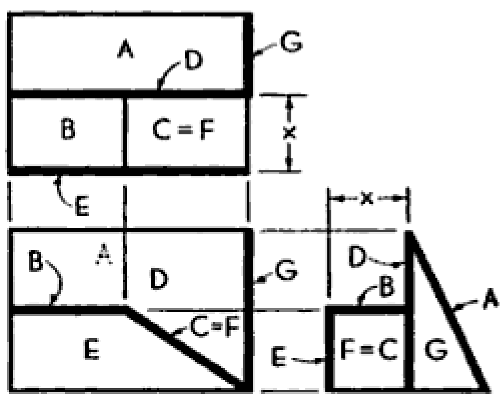


Fig. 1-21. Las superficies que se muestran de perfil están dibujadas en líneas gruesas.

1·11. Indicaciones generales para la lectura de un dibujo

En los artículos anteriores, la lectura de un dibujo de múltiples proyecciones ha quedado reducida a un proceso de análisis completo y exacto. Los análisis de los objetos, representados como cuerpos geométricos por sus superficies, han sido explicados, a este efecto, con considerable detalle, con objeto de convencer al estudiante poco imaginativo que él también puede aprender a interpretar o leer un dibujo. Con un conocimiento claro de principios y métodos aplicados cuidadosamente a la práctica de muchos problemas, la capacidad para saber leer los dibujos de ingeniería puede adquirirse con facilidad.

Como el conocimiento y la destreza aumentan con la práctica, se aprenderá que los análisis más bien largos son, en cierto modo, generalmente innecesarios. Tres factores contribuyen a esta facilidad interpretativa: (1) el recurso a emplear las formas geométricas, como partes componentes de los objetos que no nos sean familiares; (2) el simple reconocimiento de los objetos corrientes y (3) la aplicación rápida, casi subconsciente, de los métodos analíticos.

La figura 1·22 nos muestra los dibujos de múltiples proyecciones, correspondientes a unos cuantos cuerpos geométricos sencillos y familiares, que además de estar solos se han combinado entre sí. Tales objetos no requieren, con seguridad, ningún análisis ya que son apreciados a primera vista, lo mismo que un pianista reconoce una combinación sencilla de notas. La figura 1·23 muestra también dibujos de proyecciones múltiples de unos cuantos objetos corrientes y muy sencillos. Para el que no es técnico las proyecciones de la mesa, llave inglesa y el destornillador, le producen una inmediata representación mental del objeto. Similarmente, para el ingeniero o técnico que ha visto los planos de muchas máquinas, las proyecciones de la polea, biela y cojinete le causan también un reconocimiento instantáneo. Pero para un examen general posterior, lo mismo para el que no es técnico que para el ingeniero, tienen que examinar

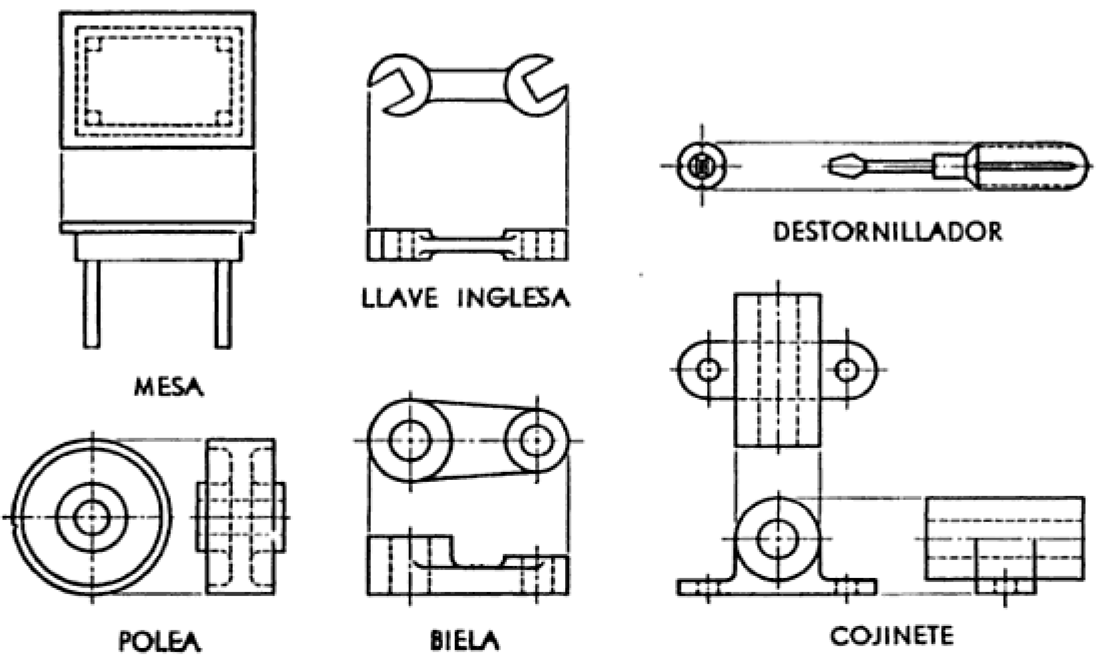


Fig. 1·23. Dibujos de múltiples proyecciones de objetos familiares corrientes.

2. PROYECCIONES AUXILIARES

2·1. Objeto de las proyecciones auxiliares

En la figura 1·10, del capítulo anterior, han sido indicadas las seis principales proyecciones de un objeto sencillo. Tres de estas proyecciones eran tan semejantes a las otras tres que, por eso fueron descartadas. Los tres planos seleccionados que están indicados en las figuras 1·8 y 1·9, se consideraron los más convenientes. Pero no todos los objetos son tan sencillos, ni constan solamente de superficies horizontales y verticales. Si un cuerpo tiene superficies inclinadas estas aparecerán en las proyecciones principales o acortadas o deformadas. En la figura 1·15 ya vimos que el cartón cuadrado, cuando estaba inclinado, nunca aparecía como tal cuadrado en ninguna de las proyecciones.

Para que una superficie inclinada pueda verse en su verdadero tamaño es preciso que el observador se sitúe, precisamente, enfrente de ella; es decir, que la dirección del rayo visual debe ser perpendicular a esa superficie. Ninguna de las proyecciones principales tiene una línea visual de dirección inclinada; por ello la proyección que se precisa ahora tiene que ser especial. Y como tales proyecciones generalmente se complementan con las principales se las llama por este motivo *proyecciones auxiliares*. Estas proyecciones auxiliares permiten representar un objeto desde una dirección deseada. De este modo estas proyecciones serán una ayuda verdaderamente valiosa para el dibujante, ya que la mayoría de todos sus problemas pueden ser fácilmente resueltos, si se observan los objetos desde las direcciones más convenientes.

2·2. Construcción de una tercera proyección principal

Como la construcción de una proyección auxiliar es muy similar a la de una principal, trataremos primero de esta última construcción. En la figura 2·1, nos dan las proyecciones vertical y lateral de un objeto y nos piden que dibujemos la proyección horizontal del mismo. En dicha figura de acuerdo con las explicaciones que a continuación se detallan, se observa que el proyecto, análisis y construcción de la nueva proyección debe ser realizado en cuatro etapas.

Etapa 1. Proyectar la posición general de la proyección nueva.

Como la proyección horizontal tiene que estar exactamente encima de la vertical podemos ya trazar, hacia arriba, las paralelas que parten de los extremos de esta proyección vertical. Si queremos tener el dibujo bien centrado, las distancias marginales *D* y *D'*, *E* y *E'*, deben ser iguales entre sí. Las distancias *B* y *C*, entre las figuras, a ser posible, serán aproximadamente iguales; en cambio, las distancias *A* y *A'*, que figuran en las proyecciones horizontal y lateral, por ser la dimensión de profundidad del objeto, tienen que ser *exactamente* iguales.

Etapa 2. Analizar las dos proyecciones dadas, y designar las superficies y puntos que se corresponden en las mismas.

En la proyección lateral, la superficie visible *T* tiene un carácter notable, a causa de su rara forma irregular. No existe ninguna área de configuración parecida en la proyección vertical, por eso esta superficie *T* se representará, de canto, según la línea inclinada *T*. Las superficies *R* y *S* pueden ser igualmente identificadas en cada una de las dos proyecciones. En la proyección lateral han sido señalados los vértices de la superficie *T*, para facilitar la construcción, trazando las correspondientes paralelas, podemos situar estos vértices en la proyección vertical.

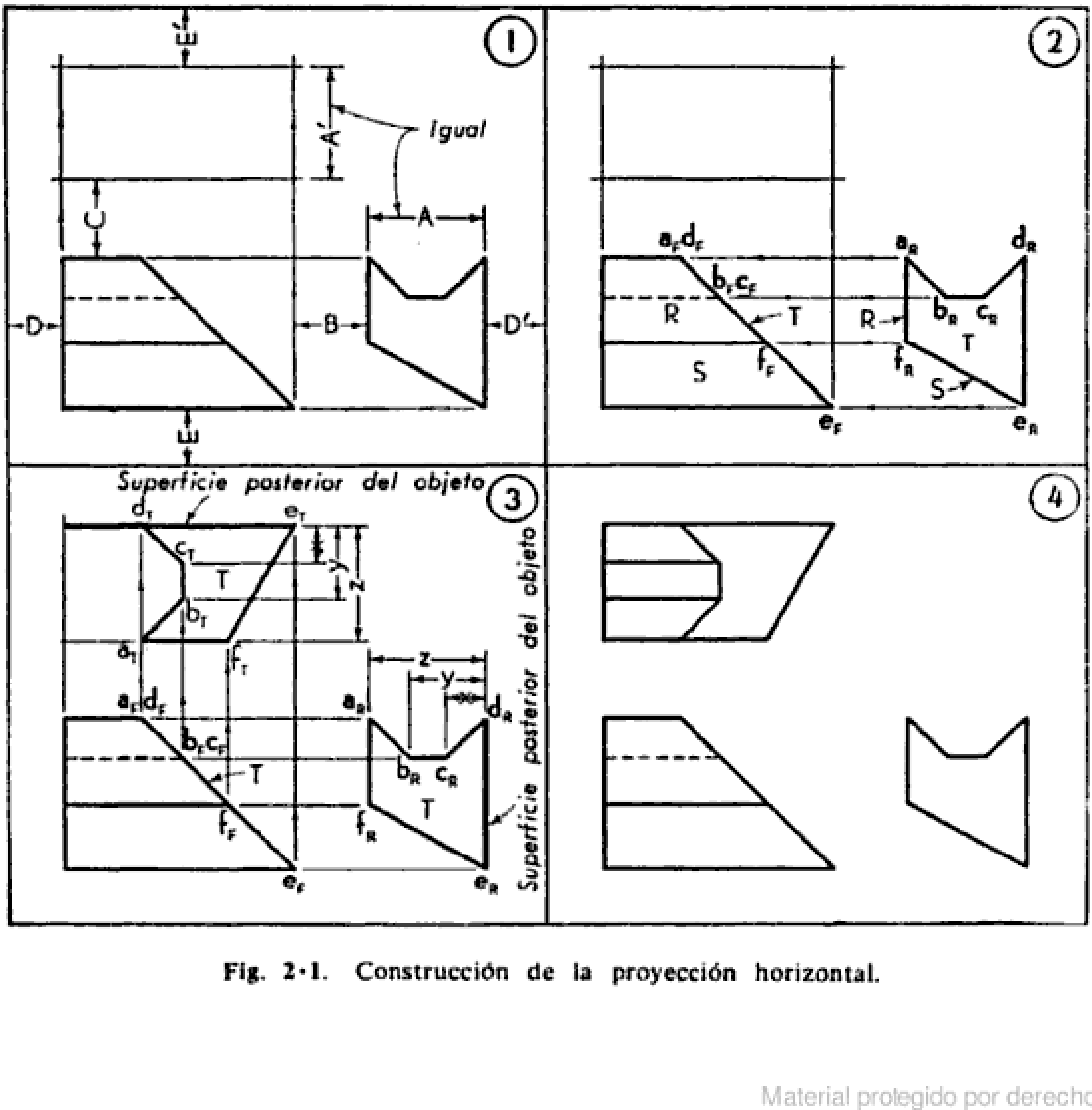


Fig. 2·1. Construcción de la proyección horizontal.

Etapa 3. Localizar por similaridad y alineación las superficies y los puntos pertenecientes a las proyecciones dadas en la proyección nueva.

Desde cada punto reseñado de la proyección vertical, se trazan paralelas hasta la proyección horizontal. Entonces a_T deberá estar colocado exactamente sobre a_F, b_T sobre b_F etc. (regla 2). Pero las proyecciones lateral y horizontal son *anexas*, y como en esa proyección lateral los vértices señalados por d_R y e_R se encuentran en la parte posterior del objeto, señalada con una línea gruesa, estos mismos puntos d_T y e_T deberán encontrarse también en la parte posterior del objeto, en la proyección horizontal (regla 3). El punto c_R se encuentra, en la proyección lateral, a una distancia x de la superficie posterior del objeto. El vértice c_T, situado en la proyección horizontal exactamente encima de c_F, deberá encontrarse a la misma distancia x de la línea posterior del objeto. De igual modo, b_T estará a la misma distancia y que lo está b_R, de esa superficie posterior del objeto. Los vértices a_T y f_T, que están en la superficie frontal, se encontrarán a la distancia z de la superficie posterior. Esta distancia también se indica en la proyección lateral. Luego para encontrar la proyección horizontal T de la superficie, bastará ir uniendo, alfabéticamente, los vértices ya obtenidos anteriormente.

Etapa 4. Completar la proyección por simple inspección o por otros análisis ulteriores.

Después que la superficie T haya sido dibujada, la proyección horizontal se puede completar por simple inspección, pero si el dibujante tiene una idea todavía confusa del objeto, se pueden identificar otras superficies tales como R y S, reseñándolas y construyéndolas de la manera indicada, hasta que se complete la proyección.

2·3. Empleo de una línea de referencia o de tierra

En la figura 2·1, las distancias entre paralelas se llevaban desde la proyección lateral a la horizontal, a partir de la superficie posterior del objeto. Esto es conveniente y posible hacerlo, debido a que esa superficie posterior del objeto aparecía como una línea en ambas vistas, la horizontal y la lateral. Pero puede ocurrir que la posición particular de un objeto sea tal que ninguna de sus superficies aparezca como una línea. Eso ocurre en el objeto indicado en la figura 2·2. En esta figura se dan las proyecciones horizontal y vertical de un prisma oblicuo, solicitándose la construcción de la proyección lateral derecha.

Etapa 1. Elección de una línea de referencia.

Como las distancias medidas a lo largo de las paralelas de la proyección horizontal tendrán que ser llevadas a las paralelas correspondientes de la vista lateral, se precisa una base de medida o *línea de referencia*. Ya que, en este caso, no hay ninguna línea o superficie del objeto que sea perpendicular a las paralelas, podemos elegir arbitrariamente una línea tal como la ***X-X***, de la proyección horizontal, que pase por el vértice a_T Si esta línea de referencia pasa por el punto a_T de la proyección horizontal, debe también pasar por el punto a_R de la proyección lateral, y la línea ***X-X*** colocada en la proyección lateral nos proporcionará la distancia deseada entre las proyecciones verticales y laterales.

Etapa 2. Construcción usando la línea de referencia X-X.

Consideremos solamente la superficie extrema derecha del prisma, designando sus cuatro vértices en las proyecciones horizontal y vertical. Además de las paralelas que unen estos vértices en las dos vistas dadas se trazarán las paralelas que parten de los vértices de la proyección vertical y que son perpendiculares a la línea de referencia *X-X* de la proyección lateral. A partir de los puntos en que estas paralelas corten a ese eje *X-X*, se irán llevando las distancias entre los vértices superiores b_T, c_T, d_T y la línea *X-X* de la proyección horizontal, para así obtener los vértices b_R, c_R, d_R. Por ejemplo, la distancia x de c_T al ser llevada a la proyección lateral nos da c_R. Se unirán estos vértices hallados y tendremos la proyección lateral derecha de esa superficie extrema derecha del prisma, que por ser visible desde esa proyección lateral, formará un contorno de línea continua.

Etapa 3. Construcción usando la línea de referencia X′-X′.

La construcción es exactamente igual que la indicada anteriormente, sólo que ahora se emplea la línea de referencia *X′-X′*. Si nos referimos de nuevo a la etapa 1 podemos hacer que el eje seleccionado *X-X* de la proyección horizontal se traslade paralelamente, una distancia *y*, a la posición *X′-X′*. La línea *X-X*, de la proyección lateral, se trasladará también a la posición *X′-X′*, que estará situada a la misma distancia *y*. Sin embargo, tendremos ahora la misma vista lateral que la lograda anteriormente. O sea que la línea de referencia en las dos proyecciones anexas puede ser colocada en cualquier sitio, siempre que se cumplan las dos condiciones siguientes: 1) que el eje elegido *sea perpendicular* a las líneas paralelas que unen las proyecciones adyacentes;

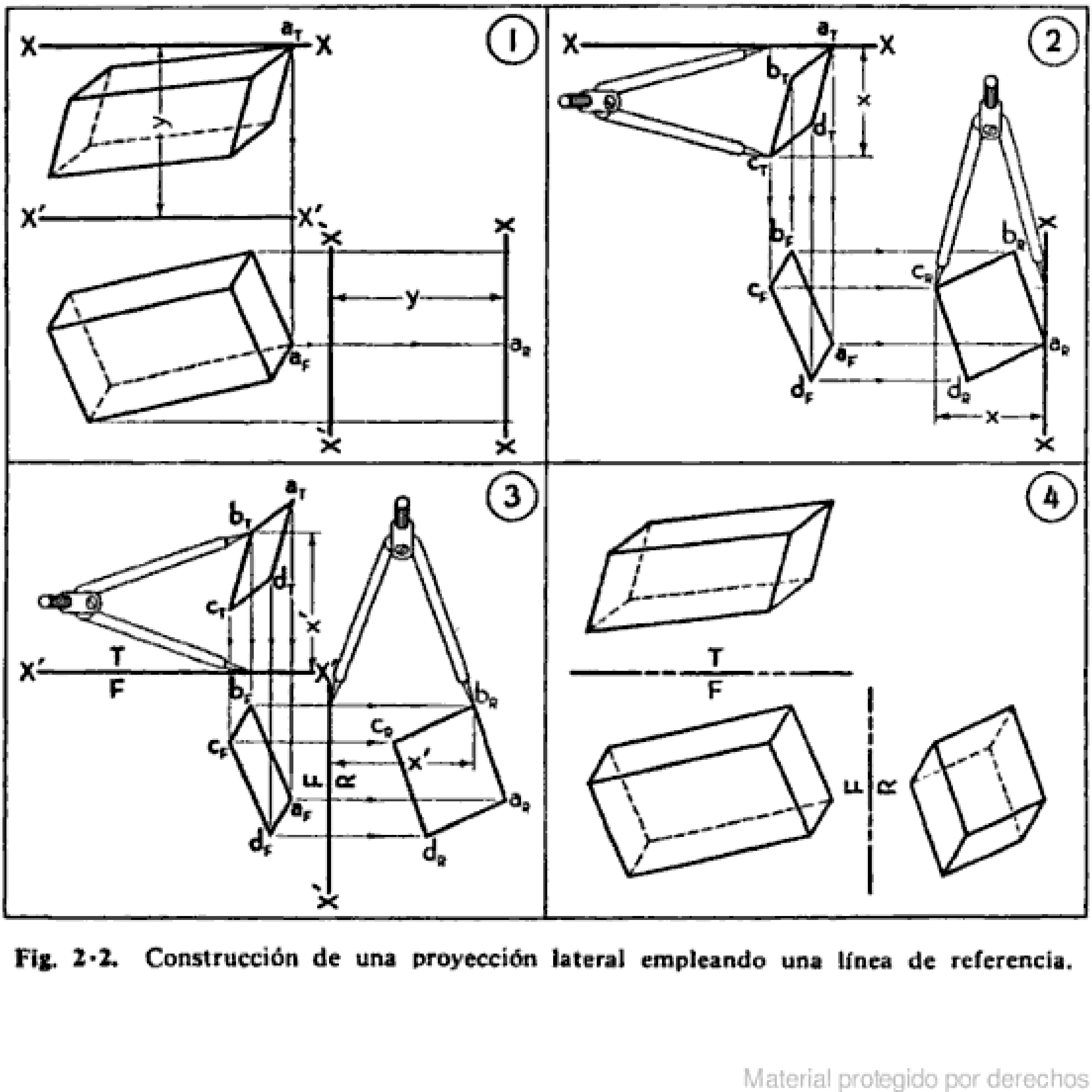


Fig. 2·2. Construcción de una proyección lateral empleando una línea de referencia.

línea dada se le pueden trazar un infinito número de líneas perpendiculares. Dada la línea vertical *T*, de la figura 2·3, hay un número infinito de líneas *A*, *B*, *C*, etc., que son perpendiculares a esa línea *T*; por lo tanto, si *T* representa la dirección visual para una proyección horizontal, entonces las líneas perpendiculares que se indican en la figura 2·3 representarían las direcciones visuales para un número infinito de proyecciones, que podrían ser adyacentes a la proyección horizontal. Pero todas estas proyecciones horizontales adyacentes deberán ser, necesariamente, tomadas con *líneas visuales horizontales*, pues a 90 grados de la vertical sólo se puede ser horizontal. Si tenemos en cuenta que el hombre es un ser que anda erguido y que corrientemente observa sus alrededores con líneas visuales horizontales, resulta que tales proyecciones no solamente son importantes en trabajos de ingeniería, sino que también proporcionan el punto de vista natural. Este tipo de proyección será considerada como *elevada o adyacente a la horizontal*.

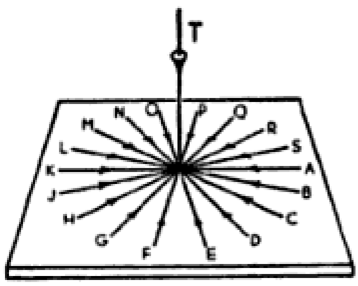


Fig. 2·3. Líneas perpendiculares a una línea dada *T*.

La figura 2·4 nos representa la proyección horizontal y cuatro auxiliares, adyacentes a la horizontal de una pirámide. En el ángulo superior derecho de esta figura se muestra la pirámide y las flechas indicadoras de las direcciones de las visuales para cada una de las proyecciones. Si miramos la pirámide hacia abajo, las flechas *A*, *B*, *C* y *F* deben aparecer como se ven en la proyección horizontal. Entonces la proyección vertical, mirando en dirección de la flecha *F*, se situará exactamente debajo de la proyección horizontal y estarán unidas por paralelas a la dirección *F*. Similarmente la vista *A*, que es una sencilla proyección lateral derecha en posición alternada como ya vimos en la figura 1·9, se une a la proyección horizontal mediante paralelas a la flecha *A*. Y las posiciones de las proyecciones *B* y *C* están también unidas a la proyección horizontal por paralelas a esas líneas visuales.

Cada uno de los cinco vértices de la pirámide han sido designados en las proyecciones horizontal verticales. La línea de referencia *T-F* se ha colocado en cualquier sitio entre las dos proyecciones. Partiendo de estas dos proyecciones adyacentes, cualquiera otra proyección adyacente a la horizontal, tal como la *B*, puede trazarse fácilmente. El procedimiento empleado, fase a fase, semejante al que se indicó para las proyecciones principales adicionales, es el siguiente:

Fase 1. Partiendo de cada vértice de la proyección horizontal, se trazan paralelas a la dirección de la línea visual *B*.

Fase 2. Perpendicular a esas paralelas se traza la línea de referencia *T-B*, a cualquier distancia de la proyección horizontal.

Fase 3. Las vistas *B* y *F* son proyecciones anexas y, por lo tanto, las distancias que se tomen en las paralelas, de puntos semejantes, deberán ser las mismas en cada proyección. El vértice o_F, por ejemplo, está a la distancia x de *T-F*; por consiguiente, el vértice o_B deberá también estar a la misma distancia

2·6. Proyecciones auxiliares adyacentes a la vertical

En el artículo anterior, la proyección horizontal era la *proyección adyacente común* para una serie de proyecciones de elevación o adyacentes a la horizontal. De manera semejante una cualquiera de las otras proyecciones principales, puede también servir de núcleo para un número infinito de proyecciones adyacentes. Pero de acuerdo con la regla 1 cada par de proyecciones adyacentes deben tener perpendiculares sus líneas visuales.

La figura 2·5 nos ilustra sobre la construcción de proyecciones auxiliares ad-

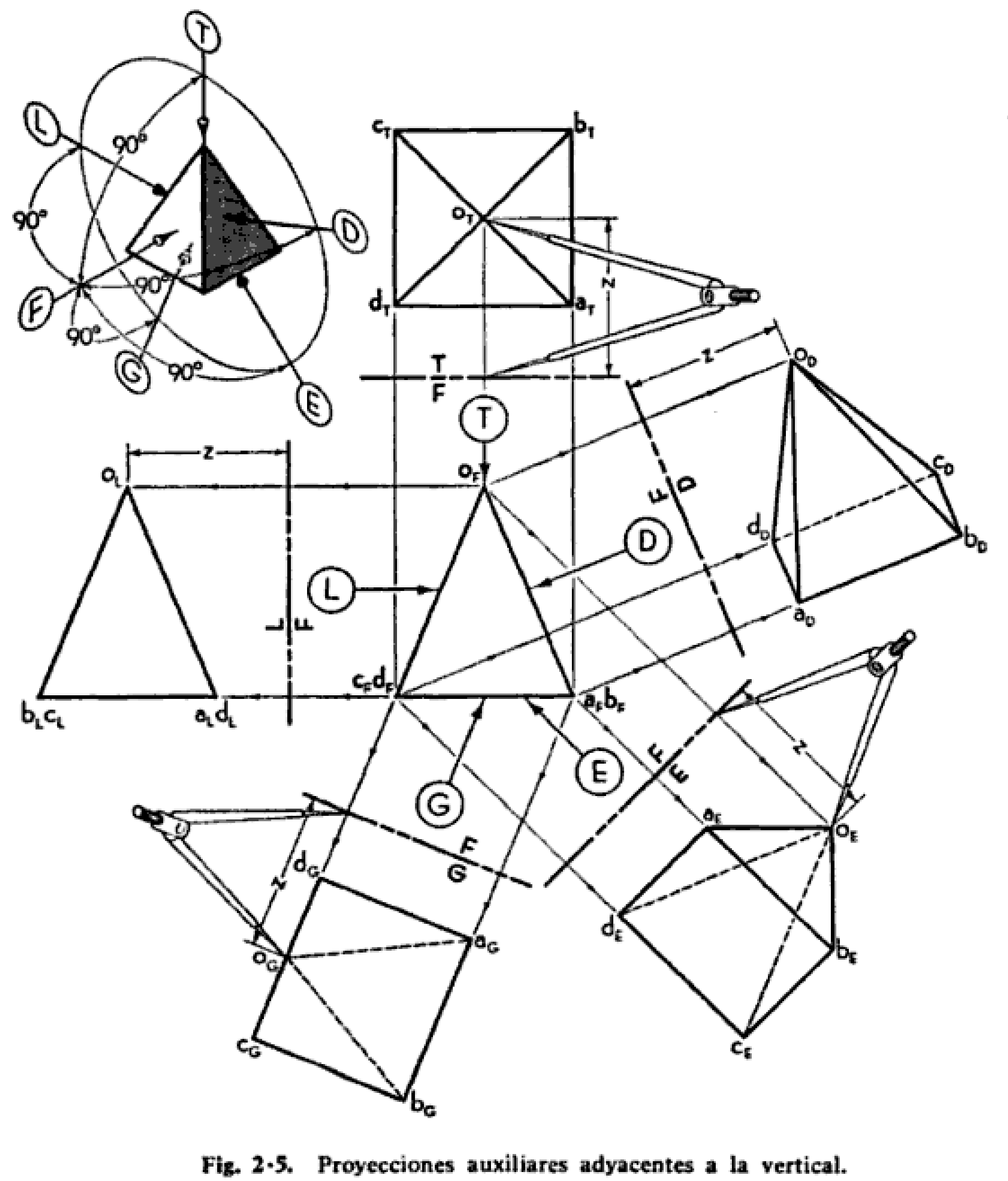


Fig. 2·5. Proyecciones auxiliares adyacentes a la vertical.

yacentes para una proyección principal, que en este caso es la proyección vertical. Las mismas proyecciones horizontales y verticales de la pirámide que se trató en la figura 2-4, son las que ahora se indican. Las vistas *D*, *E*, *G* y *L* son adicionales y adyacentes a la proyección vertical. Con el esquema gráfico, se puntualiza el hecho de que las direcciones visuales, para cada una de las adyacentes proyecciones verticales, deben formar 90° con esa visual frontal, para la proyección vertical. Las flechas direccionales aparecen claramente en la proyección vertical, situándose las proyecciones adyacentes por las paralelas a esas líneas visuales.

Las fases de construcción para estas proyecciones adyacentes a la vertical, son exactamente semejantes a las ya descritas para las proyecciones superiores-adyacentes: (1) se trazan las paralelas, desde la vertical a las líneas visuales referidas; (2) las líneas de referencia se colocan a cualquier distancia de la proyección vertical; (3) las distancias que se tomen en las paralelas, deberán ser iguales a las correspondientes de otra proyección anexa. Así, por ejemplo, si el vértice o_T está a una distancia z, de su línea de referencia *T-F*, entonces los puntos o_D, o_E, o_G, y o_L estarán todos a la misma distancia z de sus respectivas líneas de referencia. Y lo mismo sucederá para cualquier otro punto del objeto. Por lo tanto, aunque estas proyecciones pudieran aparecer muy distintas tienen todas una característica común:

Todas las proyecciones auxiliares adyacentes a la vertical representan en su verdadero tamaño la dimensión de profundidad del objeto medida de izquierda a derecha.

Ya se vio que *todas* estas proyecciones adyacentes a la horizontal tienen *líneas visuales horizontales*. Con cuatro importantes excepciones, las proyecciones verticales adyacentes tienen *líneas visuales inclinadas*. Estas cuatro excepciones son: las proyecciones horizontales, superior e inferior, cuyas líneas visuales son verticales, y las proyecciones laterales, derecha e izquierda, cuyas líneas visuales son horizontales. (Véase *L* en la figura 2-5, en la vista lateral izquierda).

Las proyecciones auxiliares pueden también trazarse de manera que sean adyacentes a las proyecciones laterales derecha e izquierda. Estas proyecciones no se han dibujado, porque el método de construcción es idéntico al reseñado anteriormente. Las proyecciones adyacentes a una lateral podrían, desde luego, tener líneas visuales perpendiculares a la línea visual lateral y poder incluir una proyección horizontal inferior y superior, una vertical y otra posterior, así como un número infinito de proyecciones inclinadas.

Todas las proyecciones adyacentes a la lateral muestran en su verdadero tamaño la dimensión de longitud del objeto tomada de izquierda a derecha.

PROBLEMAS. Grupo 3.

2·7. Proyecciones auxiliares adyacentes a otra auxiliar

Ya se ha demostrado que las proyecciones adicionales pueden representar un objeto, mostrándolo tal como aparece cuando dicho objeto se proyecta desde otras direcciones distintas a las principales. Pero las proyecciones adyacentes a las proyecciones horizontal, vertical o lateral han sido limitadas a las proyecciones cuyas líneas de visualidad sean perpendiculares a la línea visual de una de aquellas proyecciones principales. Para ver el objeto desde una dirección que no sea perpendicular a cualquiera de estas direcciones principales, es necesario dibujar una proyección auxiliar adyacente a otra proyección auxiliar, dibujada previamente. Esta construcción que es por completo similar a las descritas, se ilustra en la figura 2·6.

Como antes, se requiere la construcción de las proyecciones auxiliares *A*, *B* y *C*, partiendo, en la figura 2·6, de las proyecciones horizontal y vertical de una pirámide. Las direcciones visuales de estas proyecciones auxiliares *A*, *B* y *C* han sido seleccionadas completamente al azar para ilustrar simplemente el método constructivo de cada proyección; en otras palabras, no se ha realizado ningún esfuerzo para ver el objeto desde una específica y determinada dirección.

La *A* es una proyección horizontal-adyacente, tomada desde una dirección arbitraria. Por ello es una proyección alzada y se ha construido como se ex-

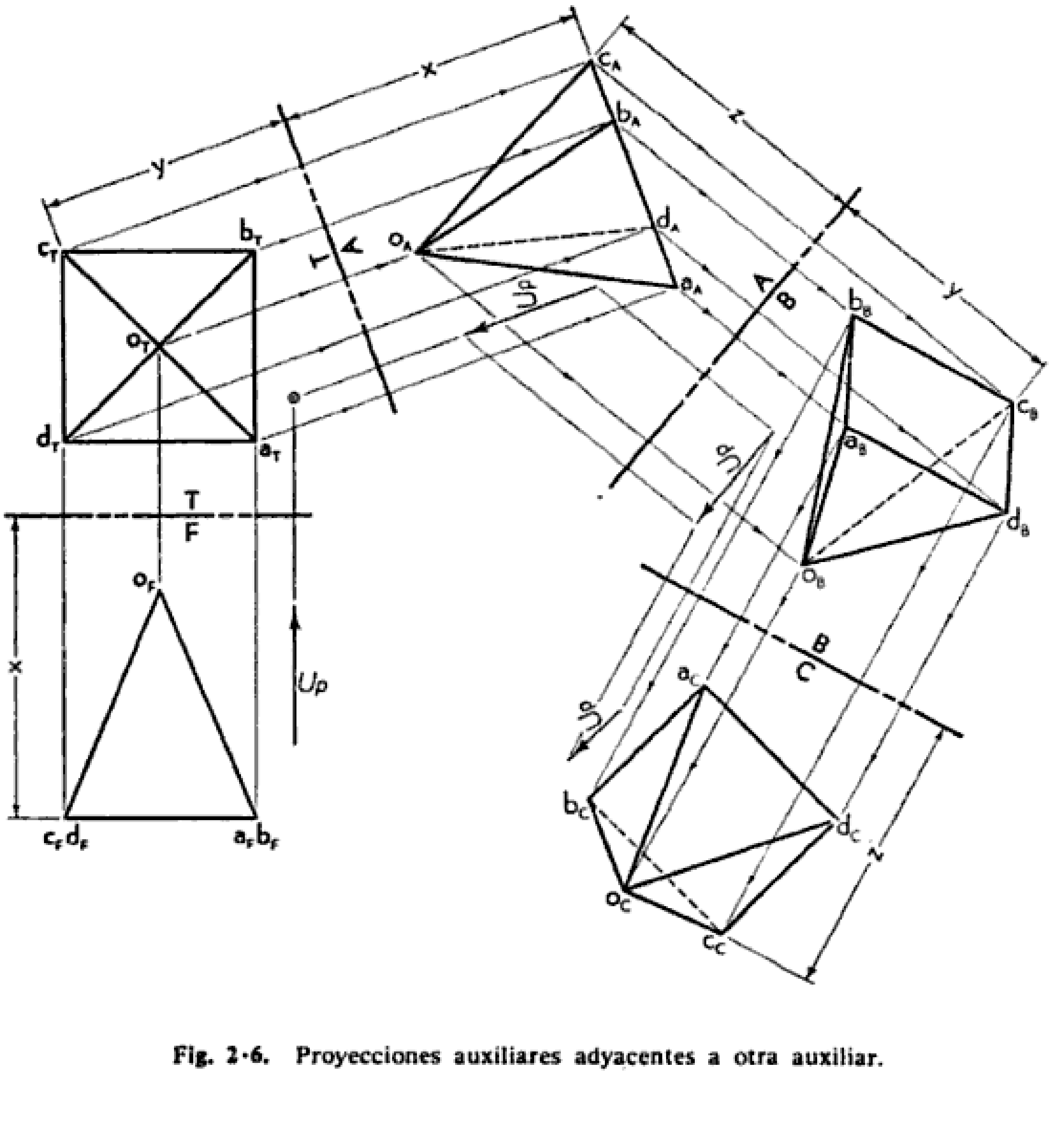


Fig. 2·6. Proyecciones auxiliares adyacentes a otra auxiliar.

plicó en el artículo 2·5. Siendo anexas las proyecciones A y F resulta que ambas tienen igual la distancia x.

Si desde los vértices de la proyección A se trazan paralelas, en cualquier dirección deseada, una nueva vista auxiliar tal como la B, se puede construir adyacente a la proyección A. La construcción de la proyección B se efectúa con un método idéntico al empleado con cualquiera de las otras proyecciones adicionales: (1) se trazan las paralelas desde cada vértice del objeto de la proyección A; (2) la línea de referencia A-B se traza perpendicular a estas paralelas y a cualquier distancia conveniente de la proyección A; (3) las distancias que se tomen en las paralelas de la proyección B, serán las distancias correspondientes de otra proyección anexa, que en este caso será la proyección horizontal. (La proyección horizontal y la proyección B son anexas, por ser cada una adyacente con la proyección A.) Como ejemplo de estas mediciones, obsérvese que los vértices c_T y c_B están a la misma distancia y de sus líneas de referencia respectivas, T-A y A-B.

La B es una proyección auxiliar, que es adyacente de otra también auxiliar. Del mismo modo que se ha trazado la proyección B adyacente a la A podemos trazar la C que sea, a su vez, adyacente con la B; y, del mismo modo se puede trazar otra proyección que fuera adyacente con la C; y así continuar hasta el infinito. Pero cualquiera que sea el número de proyecciones trazadas al aplicar la regla 3, la fase 3.ª de construcción es siempre la misma:

En toda nueva proyección las distancias que se tomen en las paralelas serán siempre obtenidas de una proyección anexa a la que se está dibujando.

Siendo la proyección C anexa a la A, el punto c_C estará de su línea de referencia B-C a una distancia z exactamente igual a la que separa c_A de su línea de referencia A-B.

Aunque para el dibujante es relativamente fácil imaginar la posición del observador en cada una de las proyecciones principales, para proyecciones tales como la B y la C ya es mucho más difícil la visualización de las mismas. Afortunadamente, la construcción y empleo de ellas no depende de tales esfuerzos imaginativos, ya que, como veremos más adelante, si fuera necesario, la dirección visual para cualquier proyección puede determinarse por métodos analíticos.

PROBLEMAS. Grupo 4.

2·8. Aspecto de las proyecciones

De la figura 2·4 a la figura 2·6 hemos visto, en total, 12 proyecciones diferentes del mismo objeto, que, evidentemente, según la proyección vertical de cada figura, se trata de una pirámide que descansa sobre su base en posición natural colocada. Pero en aparente contradicción con este hecho, sin embargo, la mayoría de las proyecciones auxiliares que hemos visto dan la impresión de que la pirámide está en una posición inclinada y hasta en algunos casos como si estuviera vuelta totalmente. Mas en realidad, este objeto no se ha movido nunca de la posición indicada en las proyecciones horizontal y vertical originales, pues es el observador únicamente quien cambia de posición. ¿Debe entonces el observador girar totalmente su cabeza para ver el objeto de la fi-

REGLAS DE VISIBILIDAD PARA LOS CUERPOS.

a. Las líneas exteriores de cada proyección serán visibles.

b. El vértice o arista del objeto más cercano al observador será visible.

El vértice o línea de una proyección que esté más cercano al observador debe aparecer en cualquier proyección adyacente como el más cercano a la línea de referencia común y por ello será visible.

Por ejemplo, en la proyección *B* de la figura 2·7 (proyecciones *B* y *C* de la fig. 2·6), el punto a_B debe ser el vértice más próximo al observador, debido a que la proyección adyacente *C* muestra el punto a_C como el más próximo a la línea de referencia *B*-*C*.

c. El vértice o arista que está más alejada del observador estará generalmente oculto, si está dentro del contorno de la proyección.

En la proyección *B* de la figura 2·7, la línea o_Bc_B está oculta, porque en la proyección adyacente *C* la línea o_Cc_C es la más alejada de la línea de referencia *B*-*C*. Y en la proyección *C* la línea b_Cc_C, está oculta porque en la proyección adyacente *B* esta línea b_Bc_B es la más alejada del observador. Las excepciones a esta regla pueden aparecer si el objeto tiene orificios o huecos a través de los cuales la línea oculta puede aparecer visible.

d. La visibilidad de las líneas que se cruzan y son, aproximadamente, equidistantes del observador se determina estableciendo la visibilidad del punto de cruce.

Esta regla determina la visibilidad de los lados que no sean, evidentemente,

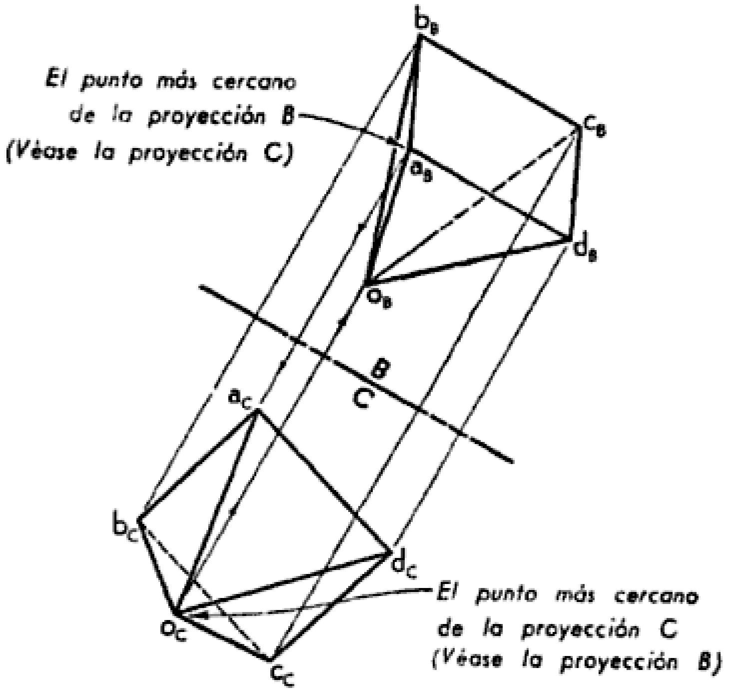


Fig. 2·7. Visibilidad en dos proyecciones cualesquiera adyacentes.

plimenfación de la regla *a*.

Esta proyección *A*, de la figura 2·9, nos demuestra también la aplicación de las tres primeras reglas. Por aplicación de la regla *a* los vértices e_A, f_A, g_A, h_A, j_A, k_A y los lados que los unen, son todos visibles por constituir el perímetro exterior de la proyección. Al aplicar la regla *b*, el vértice x_A es el más cercano al observador en la proyección *A*, ya que corresponde al vértice x_F más cercano a su línea de referencia *F-A*, este vértice será visible. Las aristas externas que unen este vértice x_A con los vértices adyacentes, es decir x_Ah_A, x_Af_A y x_Ak_A serán visibles, ya que se unen vértices que son todos visibles. Obsérvese que el vértice más alejado del observador y_F es una excepción de la regla *c* porque la línea visual del vértice y_A le permite hacerlo visible al pasar a través del orificio de la pieza.

Las cinco reglas que hemos dado aquí son aplicables para todos los objetos sólidos y determinarán correctamente la visibilidad de muchas líneas y puntos. Sin embargo, no satisfacen todos lo casos posibles; por ello será preciso dibujar las líneas restantes para su estudio. Pero si las reglas han sido plenamente observadas, las líneas que quedan deberán ser, en su mayoría, líneas interiores; y aquéllas que están más alejadas del objeto con relación al observador, evidentemente tales líneas serán generalmente ocultas. Por ejemplo en la proyección *A*, de la figura 2·9, las líneas internas que unen los vértices del orificio son ocultas, excepto a_Ay_A, que puede ser vista a través del orificio.

En resumen podríamos resaltar que todas las reglas de la visibilidad, excepto la regla *a*, están basadas en un principio capital:

La visibilidad de las líneas internas, de cualquier proyección, está determinada principalmente según la referencia de una proyección adyacente.

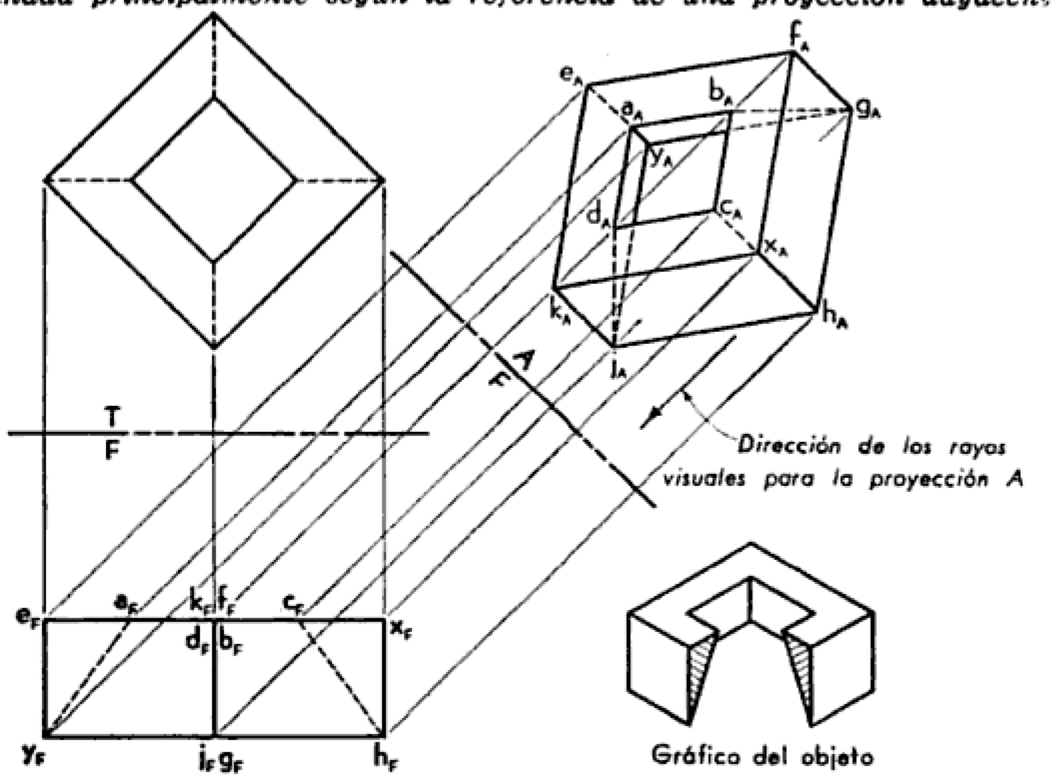


Fig. 2·9. Dibujo que determina las reglas de la visibilidad

3. PUNTOS Y LINEAS

3·1. Situación de un punto

Para localizar la posición de un determinado punto simple, numérica o gráficamente, debemos relacionarlo con otro cuya situación sea conocida. Este punto fijo viene a ser como «el punto de referencia», o más bien como «origen de mediciones» y todos los demás puntos podrán ser localizados a partir de él por cualquier sistema de mediciones tridimensionales. El sistema cartesiano de coordenadas rectangulares, que se indica en la figura 3·1 (a), es generalmente el más empleado en matemáticas, particularmente en la Geometría analítica de los cuerpos. Por el origen O hacemos pasar tres ejes X, Y y Z perpendiculares entre sí, de manera que cualquier punto tal como el A, queda perfectamente situado en el espacio tomando las tres distancias o coordenadas x, y, z.

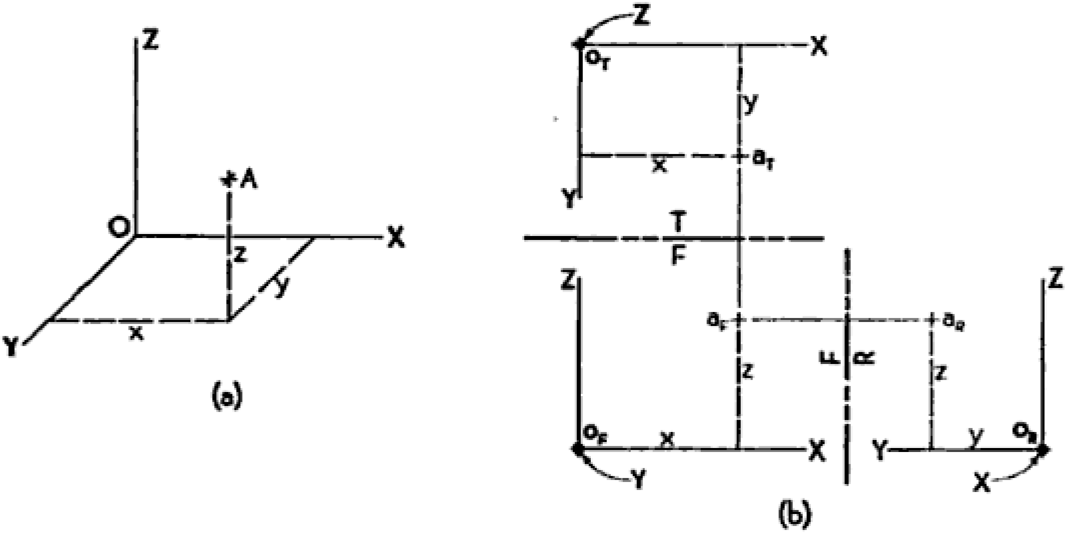


Fig. 3·1. Coordenadas cartesianas.

Este sistema de mediciones puede también ser empleado en los dibujos de proyecciones múltiples, tal como se indica en la figura 3·1(*b*). Se muestran las proyecciones horizontal, vertical y lateral derecha de los tres ejes y del punto *A*, de la figura 3·1(*a*). Se deduce, inmediatamente, que ninguna de las tres proyecciones puede describir ni determinar completamente la posición del punto *A* con relación al origen *O*. En la vista horizontal, donde el eje *Z* aparece como un punto, sólo se ven las distancias o coordenadas *x* e *y*; en la proyección vertical aparecen solamente las distancias *x*, *z*; y por último en la proyección lateral, se muestran las distancias *y*, *z*. Pero si tomamos dos cualesquiera de estas tres proyecciones, entonces tendremos las tres coordenadas *x*, *y*, *z*, quedando así localizado el punto *A*.

La figura 3·2 refleja una aplicación práctica de los ejes coordenados en relación con un avión. El origen *O*, está situado en la intersección del plano central del fuselaje —plano vertical *YZ*— con el borde delantero del ala. Las direcciones hacia arriba, hacia la derecha (que es el lado izquierdo del avión) y hacia atrás, se consideran direcciones positivas. Con el empleo de este juego de ejes, cualquier punto del avión puede ser localizado por sus coordenadas; los ejes *X* e *Y*, en plano horizontal, indican la posición de vuelo normal del avión. El punto *A*, por ejemplo, extremidad del ala izquierda, tiene las coordenadas *x*, *y*, *z*, que vemos en la figura reseñada.

Es conveniente, algunas veces, para señalar un punto, indicar su posición con relación al origen o punto de referencia; y así decimos que está a su izquierda, o a su derecha, encima o debajo, al frente o detrás de ese origen. Aunque aquí los términos de «encima» o «debajo», son más bien «más alto que» o «más bajo que», es decir que esos puntos no están *exactamente* encima o debajo de ese punto de referencia, en la misma vertical. Lo mismo diríamos con los significados de «izquierda» o «derecha», «al frente» o «detrás». El punto *A*, por ejemplo, puede ser descrito como si estuviera con relación al

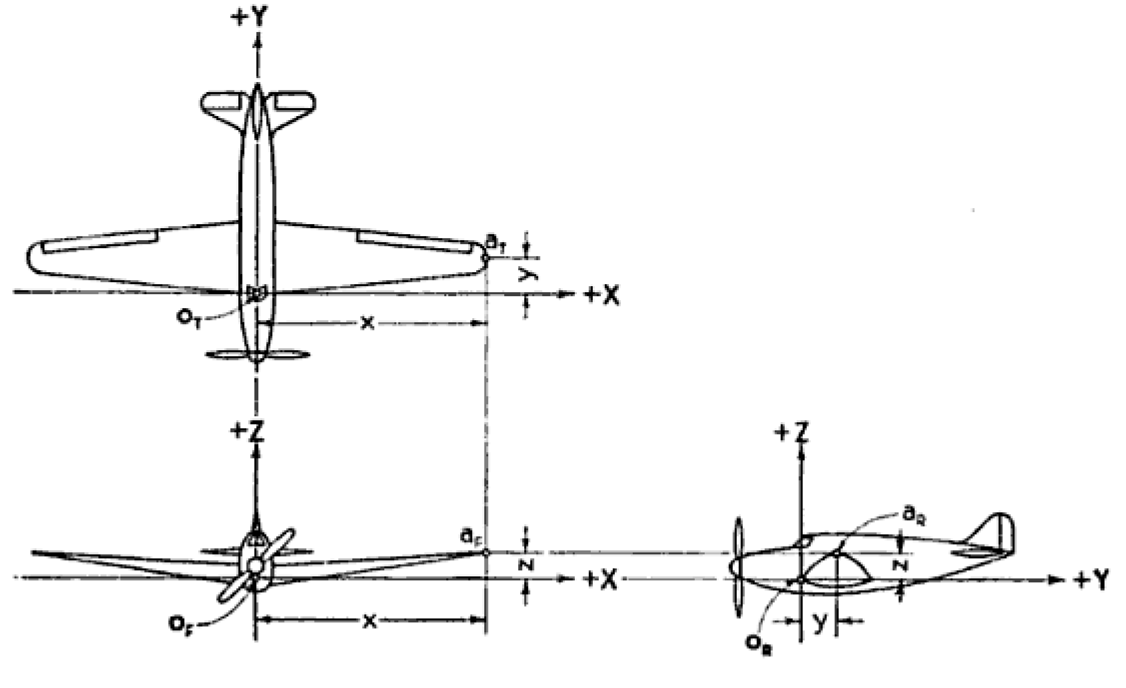


Fig. 3·2. Ejes coordenados o de referencia de un avión.

punto O, a 2 cm a la derecha, 1,5 cm encima y 1 cm delante. Si en la figura 3·3 se da la posición del origen O, el punto A puede ser localizado en cada una de las tres proyecciones. Desde la proyección horizontal se pueden tomar las distancias hacia la izquierda o a la derecha, y hacia el frente o hacia atrás, pero no se puede tomar la *altura*; el punto a_T está situado 2 cm hacia la derecha del punto o_T y 1 cm al frente de este punto. (*Hacia* el frente es siempre *hacia* la proyección vertical; es decir delante de o_T). El punto a_F está colocado exactamente debajo de a_T, y por ello no es necesario medir la distancia de 2 cm. Pero ahora, en la proyección vertical, podemos medir la altura, apareciendo el punto a_F 1,5 cm más arriba del punto o_F. (*Hacia arriba* es hacia la proyección *horizontal*). Con las proyecciones horizontal y vertical el punto A queda localizado, completándose la vista lateral derecha del modo conocido. Las flechas direccionales, que se indican en la figura 3·3, no se señalan, en los dibujos de ingeniería, pero se han reflejado aquí para facilitar lo que se indica.

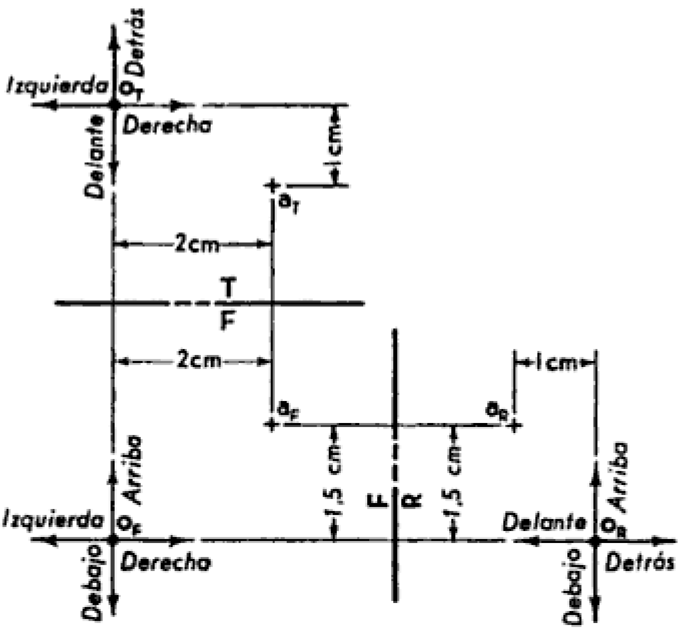


Fig. 3·3. Situación del punto A con relación al punto O.

3·2. Mapas y situación de una línea

Cuando una parte de la superficie de la tierra tiene que ser representada, se emplea un mapa, que es realmente un dibujo de una sola proyección, la horizontal. Aunque se emplean muchas clases de mapas, el mapa topográfico es el que nos muestra, en gran escala, la forma exacta de la superficie de la tierra y es de gran importancia para el ingeniero.

En la figura 3-4, está dibujada la proyección de un terreno en su forma más sencilla, tal como aparecería un mapa. Vemos una serie de líneas de contornos cerrados, cuyo conjunto representa una colina. Cada una de estas líneas, de formas irregulares, viene a ser como una línea imaginaria de la superficie de la tierra que uniera los puntos de la misma cota o altura. Los números que aparecen sobre estos contornos indican la elevación, en metros, que tienen esos puntos sobre el nivel del mar, y así en una sola proyección quedan reflejadas el mapa. Si consideramos la línea $o_T a_T$ a partir de este punto hallado a_T formaría un ángulo de 60° SO, con la dirección norte: igual al anterior, por ser iguales los ángulos $No_T a_T$ y $o_T a_T a_F$.

Para comprender más fácilmente la forma de la colina que hemos visto en la representación altimétrica con curvas de nivel, de la figura 3·4, se representa también el alzado de perfil. Aunque realmente no se suele emplear esta proyección vertical, ya que la proyección horizontal proporciona toda la información necesaria.

3·3. Situación de una línea

Una línea recta se determina, generalmente, designando sus puntos extremos; pero otros dos puntos cualesquiera, la determinarían igualmente en dirección y posición. Por lo tanto, para fijar una línea es necesario solamente determinar dos puntos cualesquiera de la misma. Para mayor brevedad, en lo sucesivo, la palabra sencilla de *línea* nos dará a entender que es *línea recta*.

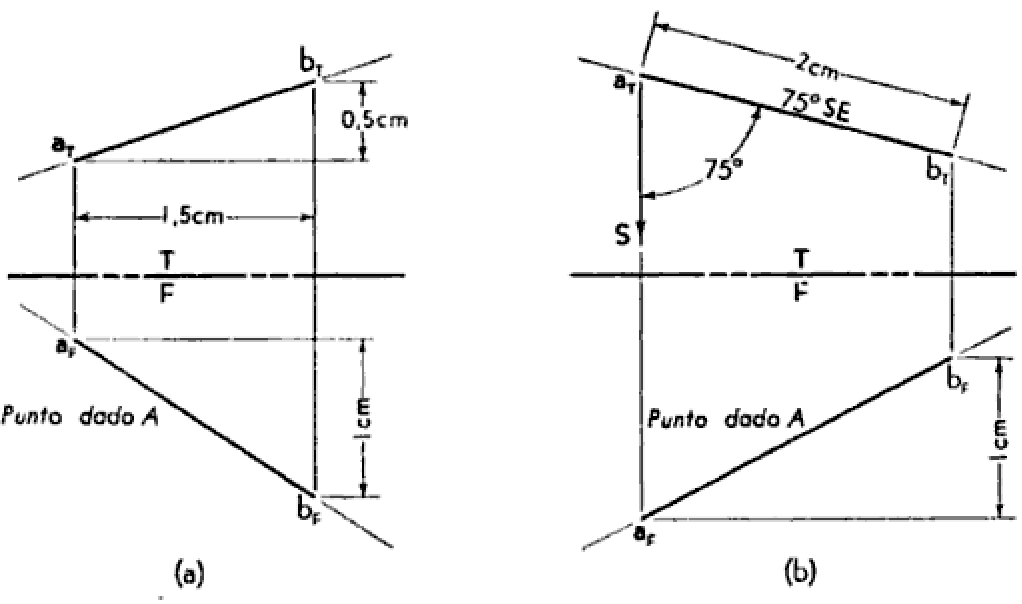


Fig. 3·5. Situación de una línea recta.

Veamos la figura 3·5(*a*), en la que suponemos, por ejemplo, se da la posición del punto *A* y sabemos que el punto *B* está a 1,5 cm a la derecha de *A*, 0,5 cm detrás de *A* y 1 cm más bajo que *A*. Entonces, en las proyecciones horizontal y vertical, partiendo del punto *A*, podemos situar fácilmente el punto *B*. Obsérvese, de nuevo, que las medidas referentes a la altura —arriba o abajo, más alto o más bajo— nunca se pueden medir en la proyección horizontal y sí en las proyecciones donde aparece esa elevación. La línea *AB* quedará ahora fácilmente construida, pues bastará unir los puntos *A* y *B* de cada proyección.

Puede también trazarse una línea recta como se indica en la figura 3·5(*b*). Supongamos, como anteriormente, que se nos da la posición del punto *A* en esa figura. Sabemos también que el punto *B* está sobre una recta situada a 75° SE del punto *A*. El punto *B* dista 2 cm de *A*, y está 1 cm más elevado

Si las proyecciones horizontal y vertical de una linea son perpendiculares a la línea de referencia, decimos que la *línea está de perfil*; como la que vemos en la figura 3·6(*b*). Si se observan las proyecciones horizontal y vertical de *CD*, en ambas rectas aparecen los puntos *R* y *S*, por lo cual podemos suponer que pertenecen a esa recta, pero al comprobar la proyección lateral derecha, vemos que el punto *R* no pertenece a la referida recta, pues todo punto que pertenezca a una recta debe aparecer sobre ella en *todas* sus proyecciones. Cualquier proyección nueva —menos la inferior o la posterior— como la auxiliar *A*, nos demostraría igualmente que el punto *R* no pertenece a la recta *CD*.

3·5. Situación de un punto en una línea por sus coordenadas

Si sabemos ya que un punto pertenece a una línea dada, entonces es suficiente una coordenada para determinar su posición en esa línea. Por ejemplo, en la figura 3·7(*a*) suponemos que el punto *X* pertenece a la linea *AB*, y sabemos además que está situado 1 cm a la derecha del punto *A*. Bastará trazar

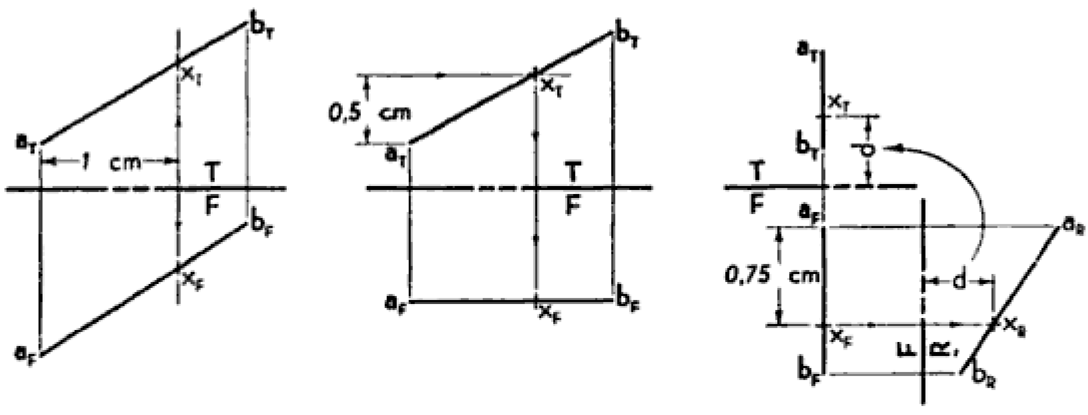


Fig. 3·7. Situación de un punto sobre una línea por coordenadas.

una paralela, a 1 cm a la derecha del punto *A*, quedando localizado el punto *X* en x_T y x_F, y así resuelto el problema.

Si el punto *X* tiene que estar 0,5 cm detrás del punto *A*, entonces en la proyección horizontal se trazará a partir de a_T una paralela a la linea de referencia que esté situada detrás del punto *A* El encuentro de esta línea con a_Tb_T es el que determina la proyección x_T del punto *X*. La proyección vertical x_F, de la figura 3·7(*b*), tiene que estar exactamente debajo de x_T.

En la figura 3·7(*c*), sabemos que el punto *X* de la línea de perfil *AB*, está situado a una distancia de 0,75 cm debajo del punto *A*, teniendo así determinado el punto x_F. Consideramos una vista auxiliar, tal como la *R*, y hallamos x_R. Entonces no tenemos más que trasladar la distancia *d*, a la proyección horizontal para tener el punto x_T.

El siguiente teorema nos será valioso para los problemas del tipo que acabamos de estudiar:

Un punto cualquiera situado sobre una línea la divide en dos segmentos cuya proporción o razón es siempre la misma en todas las proyecciones de esa línea.

Así, si el punto X está en la mitad de la línea AB, entonces los puntos x_T, x_F y x_R estarán en la mitad de sus líneas respectivas. Con este teorema se determina un punto, en una línea de perfil, sin necesidad de tener que trazar una proyección nueva. Si, por ejemplo, en la figura 3·7(*c*), el segmento x_Fb_F es exactamente un tercio de a_Fb_F se determinaría x_T tomando simplemente x_Tb_T como un tercio de a_Tb_T. Sin embargo, y en general, a menos que la división de la línea sea muy sencilla y conveniente, es mejor emplear la proyección auxiliar.

PROBLEMAS. Grupo 5.

3·6. Longitud verdadera de una línea (proyección fundamental, tipo I)

La *longitud verdadera* de una línea es la distancia real que existe entre sus

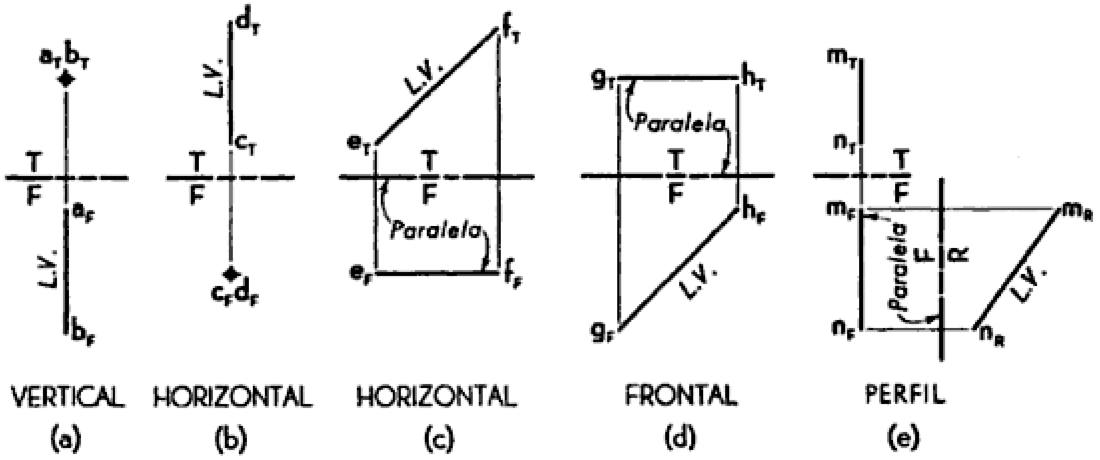


Fig. 3·8. Líneas principales.

dos puntos extremos. El lector podrá representar una línea mediante un lápiz colocado en posición inclinada delante de él y entonces variando estas posiciones puede ir determinando las proyecciones correspondientes. Verá, en seguida, que para ver la longitud total y real del lápiz, el observador tiene que mirarlo en una dirección perpendicular; es decir que los extremos del lápiz tienen que ser equidistantes del ojo del observador. Si uno de los extremos del lápiz está más alejado del observador que el otro, el lápiz aparecerá necesariamente más corto de lo que realmente es.

Las líneas que se indican en la figura 3·8 se llaman *líneas principales*, porque cada una de ellas aparece en su verdadera longitud en una de las dos proyecciones principales. La *línea vertical* (*a*) es perpendicular a todas las líneas visuales horizontales y por ello aparece en su verdadera longitud (*L.V.*), en la proyección vertical. Todas las *líneas horizontales* (*b*) y (*c*), figuran en su verdadera longitud en la proyección horizontal, porque ambos extremos de la línea estarán siempre equidistantes de la mirada que hacia abajo dirija el observador. Una línea inclinada nunca puede aparecer en su longitud verdadera en la proyección horizontal, pero si es una línea frontal se ve en su longitud verdadera en la proyección vertical, como en (*d*), ya que está contenida en un plano paralelo a la línea de referencia; o también si la línea es *de perfil*, es decir si está en un plano de *perfil*, como en (*e*), aparece en su longitud real en la proyección *lateral*. Si la línea es *oblicua* o de inclinación cualquiera, no aparecerá en su longitud real en ninguna de las tres proyecciones principales. En general, una línea aparecerá en su longitud verdadera si en cualquier proyec-

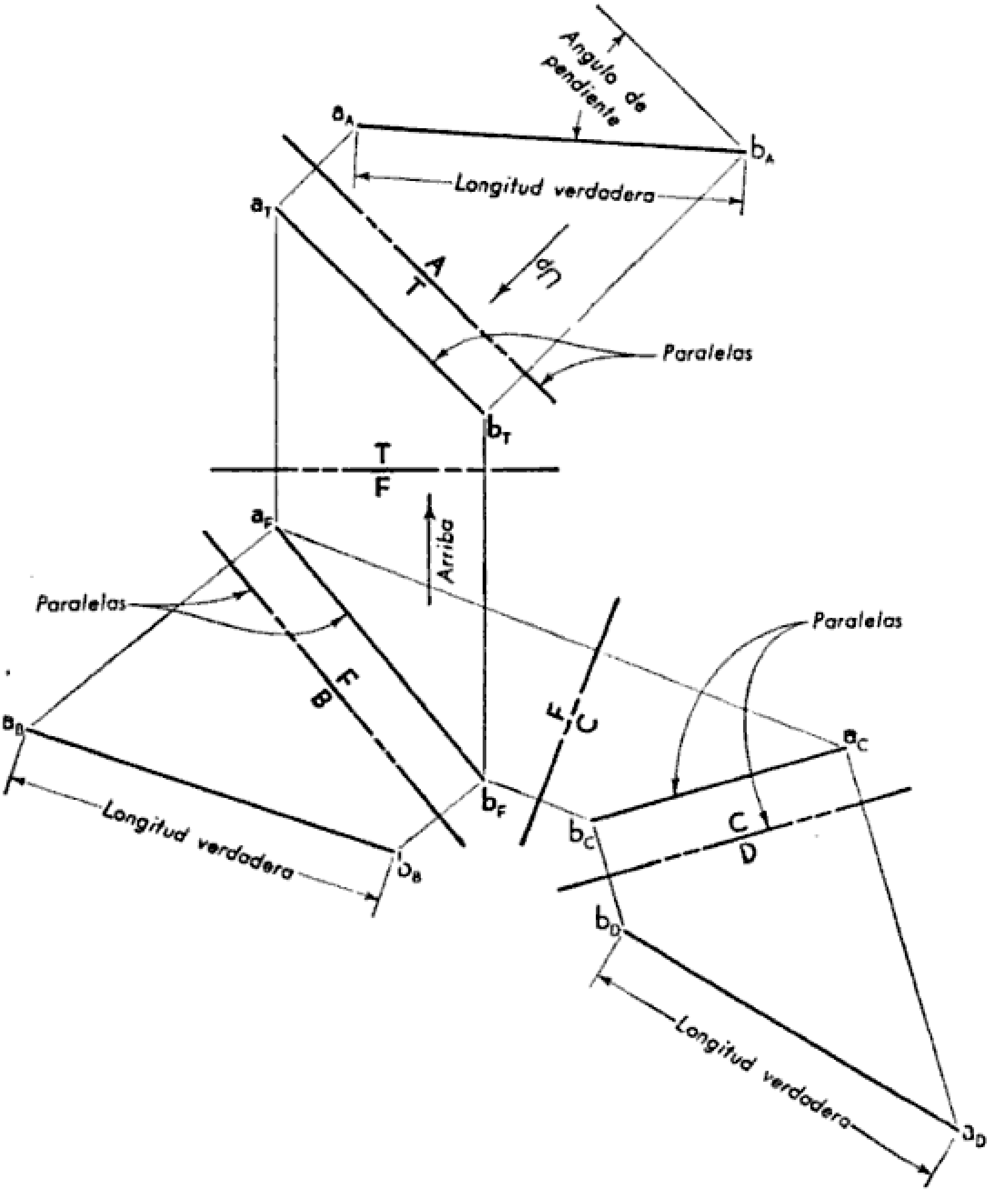


Fig. 3·9. Verdadera longitud de una línea.

ción adyacente los extremos de esa línea están a la misma distancia de la línea de referencia o del observador.

La regla siguiente, en dos apartados, resume las observaciones indicadas.

REGLA 6. REGLA DE LAS LONGITUDES VERDADERAS.

a. *Si una línea aparece como un punto en una proyección, figurará en su verdadera longitud en cualquier proyección adyacente en donde esa línea aparezca perpendicular a la línea de referencia común.*

b. *Si en una proyección una línea es paralela a la línea de referencia, aparecerá en su verdadera longitud en la proyección adyacente.*

Cuando una línea es oblicua, como vemos en la figura 3·9, y en las proyecciones principales no aparece en su verdadera longitud, entonces será necesario trazar una proyección nueva para determinar su longitud real. Dado que la línea $a_T b_T$ no es paralela a la línea de referencia *T-F*, tenemos que la línea $a_F b_F$ no expresará una longitud real; y del mismo modo la línea $a_F b_F$ por no ser paralela a *T-F* indicará que la línea $a_T b_T$ tampoco es índice de longitud verdadera (regla 6·*b*). Pero si se traza una proyección nueva, tal como la *A* adyacente a la horizontal, y cuya nueva línea de referencia *T-A* sea paralela a $a_T b_T$, entonces la nueva línea obtenida $a_A b_A$ nos indicará la verdadera longitud de esta línea. También se puede dibujar la proyección nueva adyacente a la proyección vertical.

Se han trazado las dos proyecciones *B* y *C*, adyacentes a la vertical, aunque solamente en la proyección *B* figura la línea $a_B b_B$ en su verdadera longitud, por ser la línea de referencia *F-B* paralela a $a_F b_F$. La línea $a_C b_C$ no indica la longitud real y debe ser más corta, pues al proyectarse una línea las medidas nunca aparecen más largas de lo que realmente son. Sin embargo si se parte de esta proyección *C* trazando otra proyección adyacente *D* cuya línea de referencia *C-D* sea paralela a $a_C b_C$, se obtendrá la línea $a_D b_D$ de longitud real.

En resumen:

Si en cualquier proyección se traza una línea de referencia paralela a una línea perteneciente a la misma, entonces en la nueva proyección adyacente aparecerá dicha línea en su verdadera longitud.

En el campo de la ingeniería es necesario, frecuentemente, determinar distancias reales en metros o centímetros, de elementos estructurales o de maquinaria tan variados como: cables inclinados, tensores de alambre, vigas, distancias a los centros, etc. El método gráfico que se ha descrito en este artículo, es un medio rápido y sencillo para obtener las longitudes sin deformación, siempre que el grado de precisión requerido sea factible con la escala del dibujo que se trate. Si tenemos un dibujo trazado a escala 1/100, un error en ese dibujo de 1/2 mm equivale a un error de 50 mm en la estructura real. Si un error de esta magnitud no es tolerable entonces deberá aumentarse la escala del dibujo (en escala 1/10, el error de 1/2 mm supondría sólo un error real de 5 mm) o bien calcular matemáticamente esa distancia real, como se indica en el artículo A·28 del Apéndice.

En los artículos siguientes se demostrará que sólo existen *cuatro* tipos de proyecciones que sean verdaderamente importantes. La proyección que nos representa una línea en su longitud verdadera, es la primera de estas cuatro proyecciones importantes, pero puesto que dichas proyecciones se estudiarán y emplearán ordenadamente, ahora solamente las enunciaremos.

colocado. El ángulo de pendiente de la línea *OA*, por ejemplo, podrá determinarse si miramos en dirección de la flecha horizontal *F* ya que de este modo en la proyección vertical aparecerá el ángulo de pendiente de la línea *OA* en su verdadera magnitud. Pero cuando la línea visual es perpendicular al plano del ángulo de pendiente, será también perpendicular a esa línea *OA* y en consecuencia la referida línea aparecerá en su longitud verdadera al mismo tiempo en que el ángulo de pendiente figurará con su valor real. Por esa razón, en esa proyección vertical, las líneas *OB* y *OC* no están en su longitud real, ni sus respectivos ángulos *X* e *Y*, en su amplitud verdadera.

Para hallar la pendiente de la línea *OB* habrá que determinar una proyección nueva cuya línea visual coincida con la dirección de la flecha *A*. Puesto que la flecha *A* es horizontal, la nueva proyección debe ser una proyección vertical y debe mostrar la línea *OB* en su verdadera longitud. Todas las proyecciones adyacentes a la horizontal son proyecciones verticales (art. 2-5), por ello se trazará una línea de referencia *T-A* paralela a o_Tb_T la que entonces aparecerá en su longitud exacta o_Ab_A. En esta proyección el plano horizontal del esquema aparecerá como una línea paralela a la línea de referencia *T-A* y el ángulo de pendiente es el que forma ese plano horizontal con la línea o_Ab_A. Para observar la vista *A* en su posición natural, deberíamos girar el dibujo poniendo horizontal la línea que representa el plano horizontal, y al mismo tiempo la flecha indicaría su posición vertical.

La pendiente de una línea de perfil, tal como la *OC* puede ser hallada del mismo modo, con la excepción de que en este caso, tanto la proyección horizontal-adyacente, como la vertical-adyacente pueden utilizarse, ya que en la proyección alzada la línea aparecerá en su verdadera magnitud. Nótese, sin embargo, que en un plano vertical-adyacente en proporción alzada, tal como una proyección *R*, el plano horizontal es perpendicular a la línea de referencia *F-R*; en la proyección horizontal-adyacente, el plano horizontal es siempre paralelo a la línea de referencia.

De las consideraciones anteriores se puede deducir la siguiente regla:

REGLA 7. REGLA PARA DETERMINAR LA PENDIENTE DE UNA LÍNEA. *El ángulo de pendiente de una línea puede verse en su verdadera amplitud solamente en una proyección elevada, en la cual la línea figura en su longitud real.*

Es preciso prestar atención a los requisitos de esta regla. Para una línea dada, según vimos en el artículo 2-5, se pueden trazar infinitas líneas visuales perpendiculares a la misma, con cuyas proyecciones aparecerá esa línea en su verdadera longitud, pero sólo en una proyección de punto de vista elevado, horizontal y adyacente, aparecerá el ángulo de pendiente en su valor verdadero

Así en la figura 3-9 hay tres proyecciones diferentes con la verdadera longitud de *AB*, y únicamente en la horizontal de punto de vista elevado el ángulo de pendiente es el exacto.

Este ángulo de pendiente generalmente se mide en grados, pero también es corriente en la práctica técnica, sobre todo en la construcción de carreteras y ferrocarriles, expresar el declive en tantos por ciento.

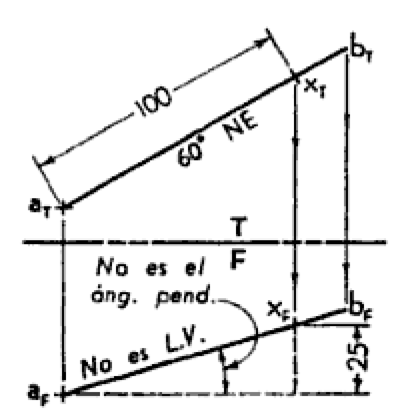


Fig. 3-11. Línea con un declive de un 25 por ciento.

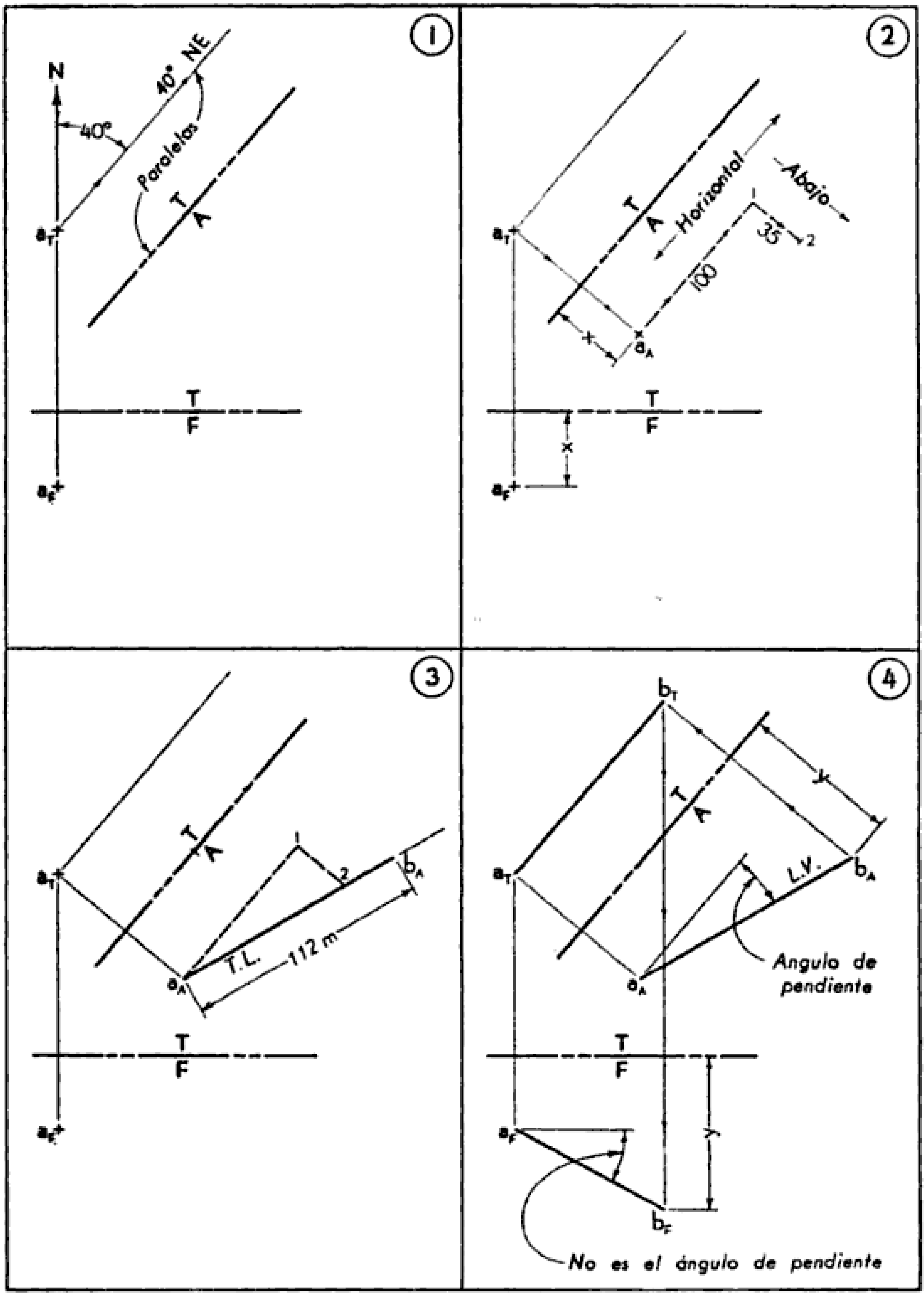


Fig. 3·12. Trazar las proyecciones de una línea de longitud conocida con inclinación a partir de a_A los 112 metros dados como longitud verdadera de la línea obteniendo el punto b_A, y con ello la proyección horizontal solicitada.

FASE 4.ª *Completar las proyecciones horizontal y vertical.*

Se traza por b_A una paralela a $a_T a_A$ hasta que corte a la paralela trazada desde a_T a la línea de referencia *T-A*, obteniendo el punto b_T. El punto b_F tiene que estar precisamente debajo de b_T y a la misma distancia *y* de *T-F* que b_A de *T-A*. Con esto se ha completado la vista o proyección vertical al lograr las dos proyecciones de *AB* deseadas.

PROBLEMAS. Grupo 7.

3·9. Trazar la proyección de una línea figurando como un punto (tipo II de proyección fundamental)

Ya en la figura 1·14 vimos que una línea podía representarse por un punto.

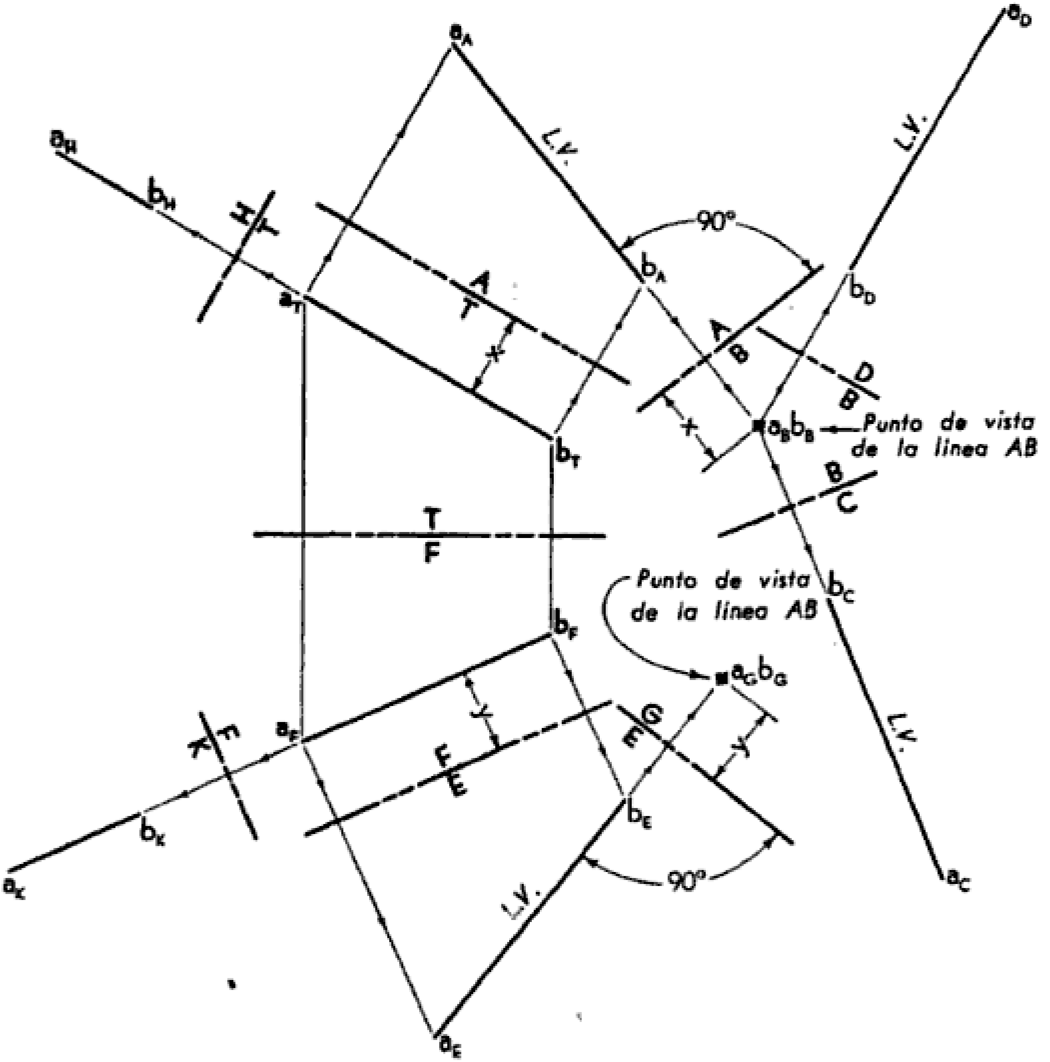


Fig. 3·13. Línea representada con un punto.

en cualquiera de las proyecciones principales. Hasta cierto punto tal proyección podría llamarse «Proyección de punto» de la línea. Para que una línea se represente como un punto es preciso que los rayos visuales del observador sean paralelos a esa línea; el extremo más alejado de la línea tiene que aparecer colocado precisamente detrás del extremo más cercano. Sabemos por la regla 1.ª que las proyecciones adyacentes tienen que tener siempre perpendiculares sus líneas o rayos visuales; por eso en la proyección de punto las líneas visuales, para cualquier proyección adyacente, tendrán que ser perpendiculares a la línea dada. Es decir que todas las proyecciones adyacentes a una proyección de punto representan a la línea en su verdadera longitud; la misma regla 6.ª expresaba ya esta condición.

En la figura 3-13 vemos como cualquier línea, inclinada oblicuamente, en dos proyecciones podemos hacer que se convierta en proyección de punto. Como en las proyecciones dadas, horizontal y vertical, no viene representada la línea en su longitud real, no es posible que en las proyecciones adyacentes a esas exista ninguna que sea proyección de punto. Partiendo de la proyección horizontal, y por una línea de referencia *T-A* paralela a $a_T b_T$ trazamos la proyección auxiliar *A*, en la que $a_A b_A$ representa la longitud real de la línea *AB*. Si queremos que los puntos *A* y *B* aparezcan sobrepuestos, en la proyección, trazaremos una línea de referencia *A-B* que sea perpendicular a $a_A b_A$, como longitud real. Los puntos a_B, b_B aparecerán unidos a una distancia x de *A-B* igual a la de la vista anexa o proyección horizontal *T*. Con esto logramos que la línea *AB* figure en proyección de punto. En forma semejante la proyección *E* da longitud real de *AB* y la proyección auxiliar *G*, perpendicular a *E* nos proporciona otra proyección de punto. Obsérvese la distancia y en las proyecciones anexas *G* y *F*.

Es interesante observar que aunque las proyecciones de punto, *B* y *G*, se han obtenido de diferentes juegos de proyecciones, ocupando posiciones distintas en el papel, en realidad son proyecciones idénticas; como si un observador mirase la línea de *B* hacia *A*. Pero como las líneas de referencia *A-B* y *G-E* han sido colocadas al extremo opuesto de la línea de longitud verdadera, entonces se observa la línea de *A* hacia *B*. Para el propósito de medir líneas, u otras aplicaciones, esta figura es muy útil.

Las proyecciones *H* y *K* han sido construidas únicamente para recalcar que una proyección de punto no se puede lograr, directamente, de una proyección oblicua de una línea.

Las proyecciones *A*, *C* y *D* demuestran la validez general de la regla 6.ª, pues se observa que todas las proyecciones adyacentes a una proyección de punto, de una línea, la representan en su verdadera longitud.

La posibilidad de que cualquier línea dada pueda representarse en la proyección por un punto, proporciona un medio poderoso y fundamental para ir avanzando en nuestro conocimiento. Una proyección de esta clase es la segunda de los cuatro tipos de proyecciones fundamentales.

> REGLA 8.ª REGLA DE LOS PUNTOS DE VISTA. *La visión de un punto, de una línea, en una proyección que sea adyacente a otra proyección en la que esa línea figure en su* LONGITUD VERDADERA, *indicará que los rayos visuales son* PARALELOS *a esa línea dada.*

PROBLEMAS. Grupo 8.

3·10. Líneas paralelas

Como ya se ha examinado el tema de las proyecciones de una simple línea, de variadas características, vamos ahora a considerar las relaciones diversas de dos líneas rectas en sus proyecciones. Dos líneas rectas pueden ser: paralelas, cortarse y cruzarse. La figura 3·14 señala siete proyecciones diferentes de un par de rectas paralelas, *AB* y *CD*, las que siempre aparecen paralelas, menos en dos casos. Estos dos casos de excepción son las proyecciones *D* y *B*. En la *D* las líneas coinciden, y la *B* es una proyección de punto. Aunque la coincidencia es un caso particular de paralelismo, y dos proyecciones de punto indican que ambas líneas tienen la misma dirección, podemos deducir:

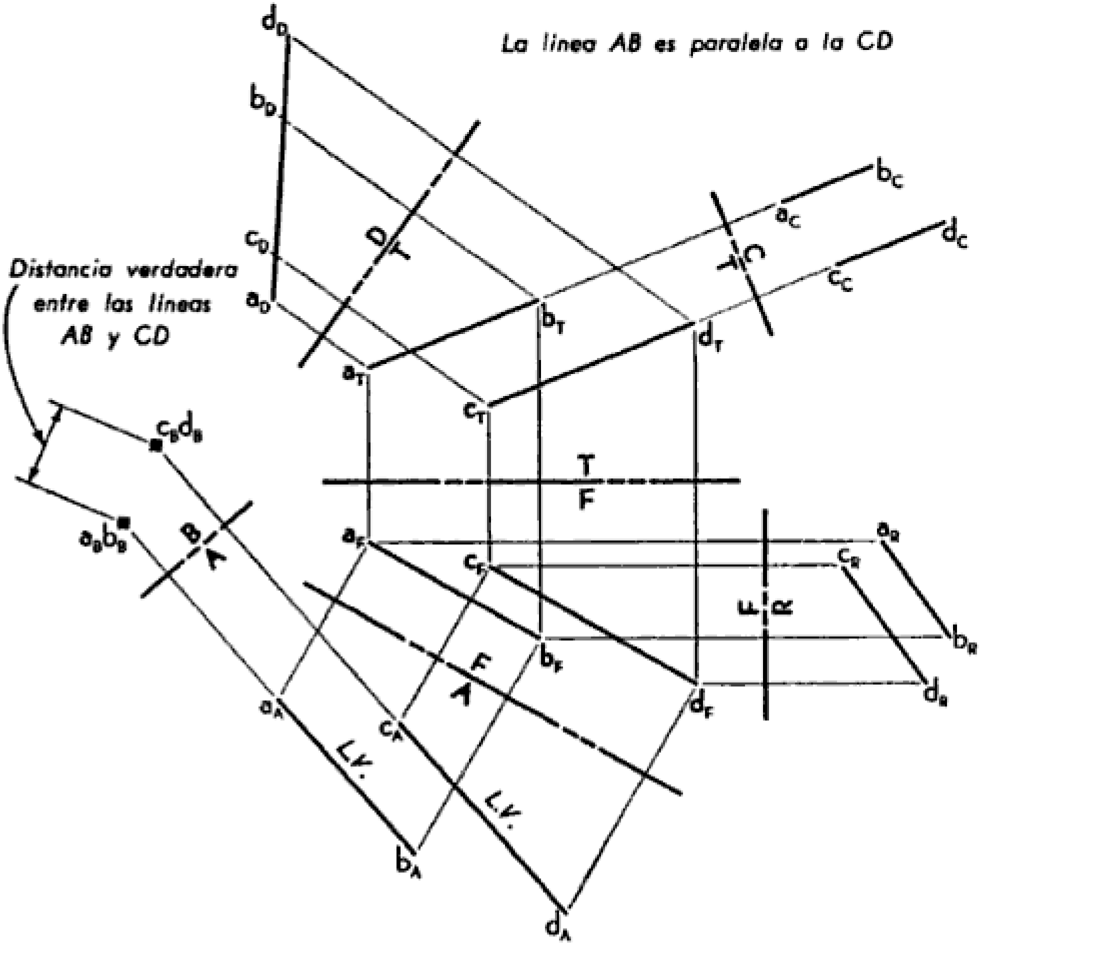


Fig. 3·14. Líneas paralelas.

REGLA 9.ª REGLA DE LÍNEAS PARALELAS. *Las líneas paralelas se mostrarán también paralelas en todas las proyecciones.*

Esta propiedad del paralelismo le es muy útil al dibujante, al servirle de medio en las diversas proyecciones para descubrir errores e inexactitudes, aunque tenga que reconocer con exactitud las líneas que sean realmente paralelas. Si dos líneas se revelan como paralelas en dos proyecciones adyacentes, es que entre ellas, figurando esta distancia en la proyección en que las paralelas en su longitud verdadera, y con una línea de referencia perpendicular a esas paralelas se proyectan en puntos, siendo la distancia entre estos puntos la que existe entre paralelas. En la figura 3·14 es la distancia que hay entre los puntos a_Bb_B y c_Bd_B.

3·13. Líneas que se cortan

Si dos líneas se cortan el punto de intersección de las dos tiene que figurar en ambas líneas en todas las proyecciones. Así en la figura 3·17 (*a*) las líneas *AB* y *CD* se cortan en el punto *X*, porque x_T intersección de a_Tb_T y c_Td_T está colocado exactamente encima de x_F que es la intersección de a_Fb_F y c_Fd_F.

En la figura 3·17 (*b*) las líneas e_Tf_T y g_Th_T se cortan horizontalmente en el punto y_T pero al trazar la paralela por este punto no cae simultáneamente en las proyecciones verticales e_Ff_F y g_Fh_F, las cuales parecen cortarse en el

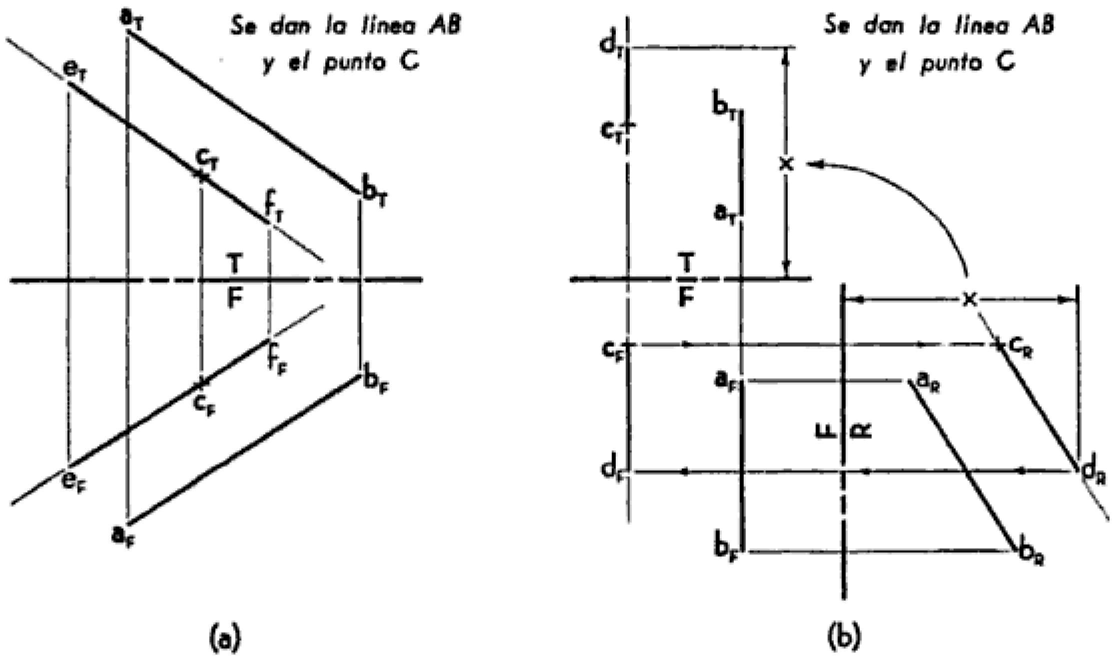


Fig. 3·16. Línea que, pasando por el punto *C*, es paralela a la línea *A B*.

punto z_F, pero en realidad se cruzan en este punto, pues al trazar la paralela hasta la proyección horizontal tampoco se proyecta en las dos proyecciones horizontales mencionadas en un solo punto. Es decir, que estas dos rectas al no tener ningún punto común; lo que hacen es cruzarse, pasando la línea *EF* sobre la *GH* y delante de ella.

En la figura 3·17 (*c*), y por el mismo método, vemos que el cable se cruza con la tubería pasando encima de ella en el punto r_T, y detrás de la misma en el punto s_F. La distancia entre cable y tubería puede ser determinada por el método del artículo 3·17.

En la figura 3·18 se indica que las líneas que se presentan de perfil requieren un método especial, para darnos cuenta si las líneas se cortan o no. En la fi-

3·14. Líneas perpendiculares

Dos líneas se pueden cortar formando un ángulo cualquiera, y cuando se encuentran perpendicularmente, que suele ser con frecuencia, gozan de propiedades especiales que conviene estudiar con detenimiento. A este objeto consideremos un examen sencillo de líneas perpendiculares, una rueda con radios y su eje. Cada uno de los radios es perpendicular al eje en un punto común, que es el centro del cubo.

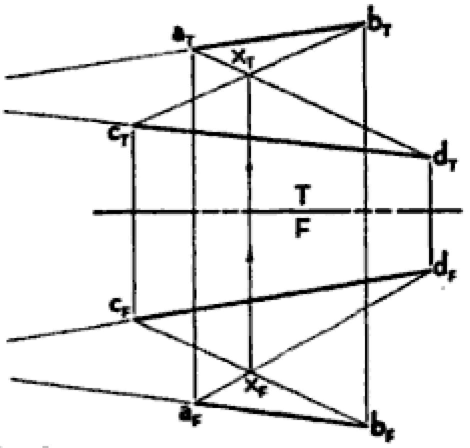


Fig. 3·19. Prueba para demostrar la intersección de dos líneas.

En el gráfico de la figura 3·20 se presenta el eje *CD* en posición inclinada, que en las proyecciones horizontal y vertical se refieren a la línea central del mismo. Si viéramos a la rueda con los rayos visuales que indica la flecha *B*, paralelos al eje de la rueda, entonces este eje se representaría por un punto y los rayos de la rueda se verían en su longitud verdadera. Pero antes de hacer la proyección *B*, en un dibujo de múltiples proyecciones hay que representar al eje en su verdadera magnitud, como se hace en la proyección *A* (regla 8).

En las cuatro proyecciones de la figura 3·20, se han trazado la línea central del eje y ocho radios de la rueda, representada por un círculo, formando cuatro diámetros. En la proyección *A*, coinciden en dirección en una línea los cuatro diámetros, y al ser la línea de referencia *T-A* paralela al eje debe aparecer en su verdadera longitud, perpendicular a la dirección de todos los diámetros, el referido eje. Al trazar la proyección *B*, con la línea *A-B* paralela a todos los diámetros, éstos aparecerán en su longitud real, y el eje proyectado en un punto. Por alineación y similaridad (en general el autor acompaña los gráficos con las explicaciones reducidas del texto, pero cuando no hay confusión posible se pueden omitir, lo que también puede hacer el estudiante) podemos localizar, en las proyecciones horizontal y vertical, cualquier diámetro elegido al azar en la proyección *B* tal como el 1-2, al situar los puntos 1 y 2. Lo mismo podemos ir situando los demás diámetros 3-4, 5-6, 7-8 desde la proyección *A* a las principales. En estas proyecciones horizontal y vertical, donde el eje *CD* no figura en su verdadera longitud, no se debe olvidar que es perpendicular a los cuatro diámetros reseñados.

El diámetro 1-2, seleccionado al azar, *no* figura perpendicular a *CD* en ninguna de las dos proyecciones principales.

El diámetro 3-4, en la proyección horizontal coincide con el eje *CD*, y en

★ **REGLA 10**

Líneas perpendiculares son las que aparecen como tales en cualquier proyección en que una o las dos figuran en su longitud verdadera

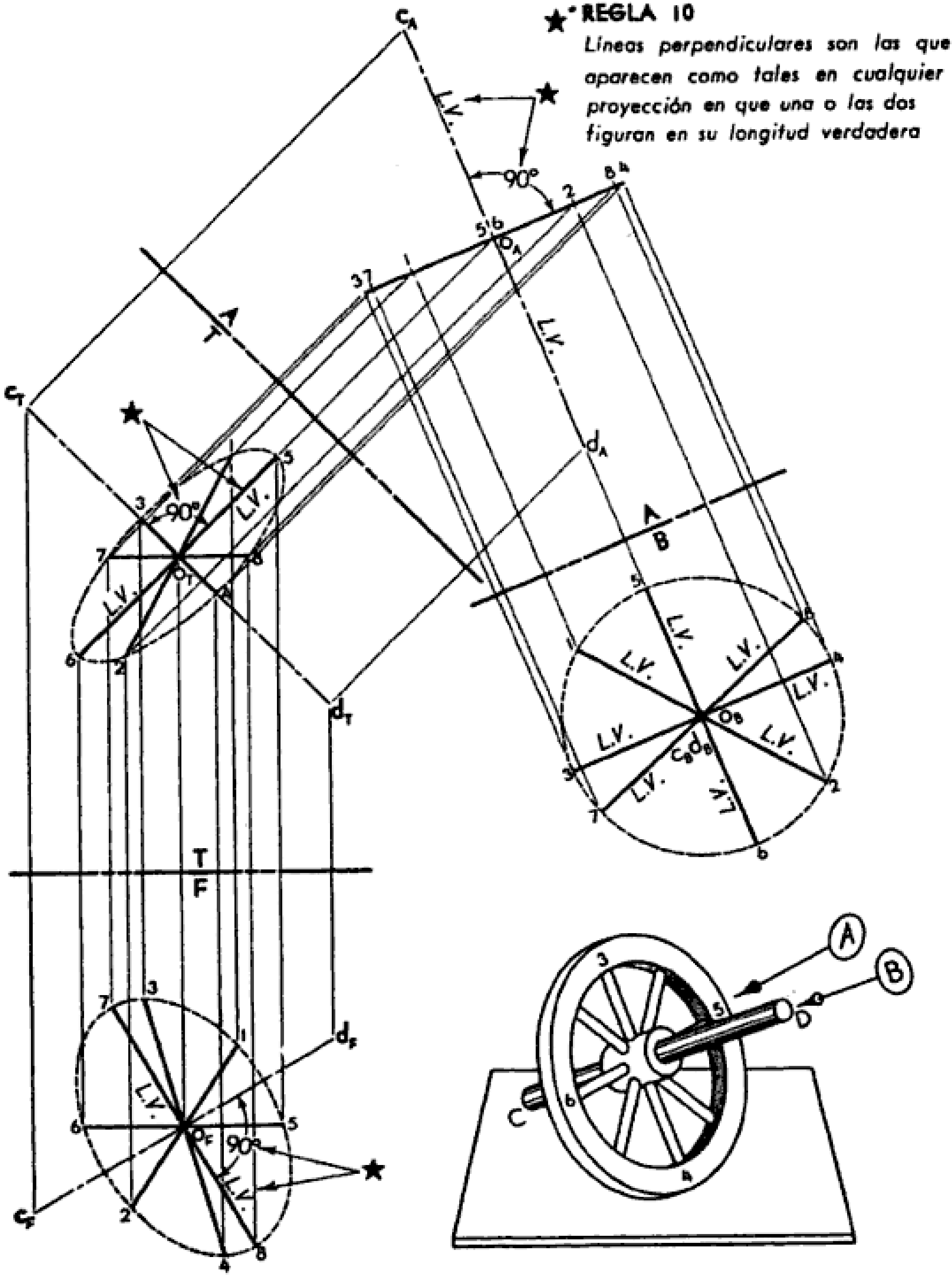


Fig. 3·20. Líneas perpendiculares.

la vertical *no* aparece perpendicular a ese eje.

Los diámetros dichos demuestran que al proyectarse un ángulo de 90°, en las proyecciones fundamentales, puede figurar con valor cualquiera en grados desde 0° a 180°.

El diámetro 5-6, en la proyección *A*, figura como un punto, luego en la proyección horizontal-adyacente tiene que presentarse en su verdadero tamaño y ser perpendicular a la línea de referencia *A-T*; y por estar en su verdadero tamaño en la proyección horizontal, en su adyacente-vertical tendrá que ser, este diámetro, paralelo a la línea de referencia *T-F* (regla 6ª). En la proyección horizontal, este diámetro 5-6, es el único que se muestra perpendicular al eje *CD*, y en su verdadera magnitud.

El diámetro 7-8, que en la proyección horizontal se ha seleccionado para ser el paralelo a la línea *T-F*, estará en su *longitud exacta* en la proyección vertical y será asimismo *perpendicular* al eje *CD*.

Resumamos ahora las observaciones anteriores:

1. Cuando el eje se muestra, en la proyección *A*, en su longitud verdadera, todos los radios al serle perpendiculares coincidirán en la misma dirección y en ángulo recto con el eje.

2. Si cualquier radio se presenta en su longitud real, formará también con el eje un ángulo recto.

3. Las excepciones a lo indicado, en 1 y 2, tienen lugar cuando el eje se representa como un punto en la proyección *B*, o cuando un radio se nos muestra como un punto, como *O*-5 y *O*-6 en la proyección. *A*.

La regla general para las líneas perpendiculares se puede enunciar así:

REGLA 10. REGLA DE LÍNEAS PERPENDICULARES. *Líneas perpendiculares son aquellas que, en alguna proyección, aparecen como tales perpendiculares y, además, una o las dos aparecen en su* LONGITUD REAL, *o sea que en una proyección adyacente una de las líneas, por lo menos, ha de ser paralela a la línea de referencia común.*

La excepción anotada anteriormente, en el apartado 3, se puede suprimir en la regla anterior, ya que si una línea se nos representa en su longitud verdadera y la otra como un punto, ello es índice de perpendicularidad.

La inversa de la regla 10 es también cierta: Si en cualquier proyección dos líneas se muestran perpendiculares y además, una o las dos, miden su verdadera longitud, es señal que las rectas en el espacio son realmente perpendiculares. En la figura 3-21, por ejemplo, se presentan cinco triángulos diferentes con ángulo recto, bien en una o en las dos proyecciones.

Para saber qué líneas son realmente perpendiculares en el espacio bastará cerciorarse si una, por lo menos, de las líneas que forman el ángulo recto tienen su longitud verdadera; será suficiente que cualquiera de esos dos lados, que forman el ángulo de 90°, sea en la otra proyección paralelo a la línea de referencia. Se verá que los ángulos rectos de los triángulos (*a*) y (*e*), no lo son en realidad en el espacio.

3·15. Trazar a una línea en un punto dado de ella una perpendicular

Como a una línea, en un punto de ella, se pueden trazar infinitas perpendiculares, para tener una solución, únicamente, se precisará que se indiquen otras condiciones especiales que tenga que cumplir. Si la perpendicular solicitada se da solo en una proyección, como en la figura 3·22 (*a*), entonces su posición se puede determinar con arreglo a la regla 10, trazándola en la proyección adyacente. Al no ser, en la proyección vertical, $a_F c_F$ perpendicular a $a_F b_F$ indica tenemos que buscar otra proyección en que apareciendo ambas líneas perpendiculares, una de ellas tenga longitud verdadera. Podemos emplear varios métodos resolutivos.

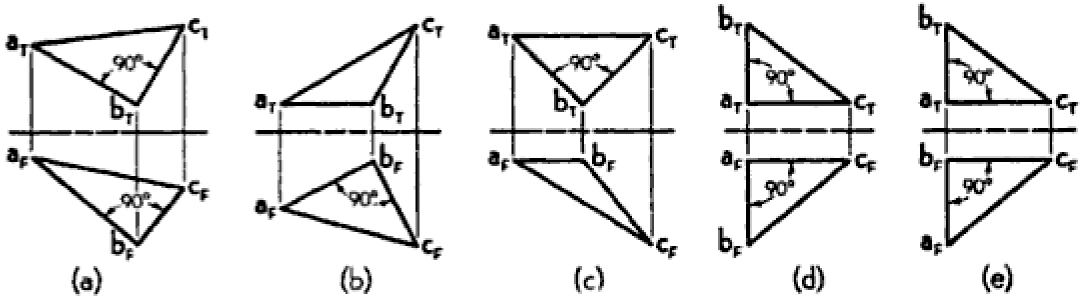


Fig. 3·21. ¿Cuáles son los triángulos rectangulos en el espacio?

El primer método a emplear se indica en la figura 3·22 (*b*), donde se ha trazado una línea de referencia *F-A* paralela a $a_F b_F$, con lo cual en la proyección *A* la línea $a_A b_A$ expresará la longitud verdadera de *AB* en el espacio, y además al trasladar $a_F c_F$, por ser perpendiculares las líneas dadas, a la proyección *A*, se tendrá que $a_A c_A$ tiene que ser perpendicular a $a_A b_A$.

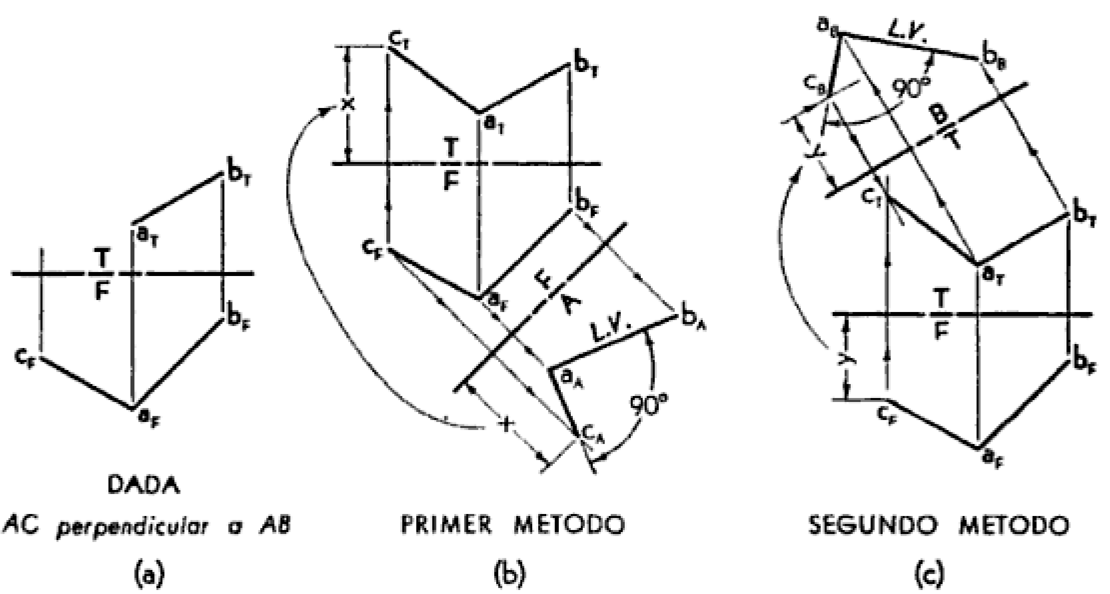


Fig. 3·22. Perpendiculares a una línea en un punto dado.

Por c_F se trazará una paralela hacia la proyección horizontal, y en ella se tomará la distancia x de c_A para tener el punto c_T y poder completar con $a_T c_T$ el ángulo recto en la proyección horizontal.

El segundo método se muestra en la figura 3·22 (*c*), en la cual en vez de trazar la línea de referencia auxiliar paralela a *AB* en la proyección vertical lo empalme se une a la tubería con una conexión corriente en T a 90°. Hay que determinar la longitud de la tubería de empalme, y situar el punto X donde se unen las tuberías.

Construcción. La longitud de la tubería solicitada es perpendicular a la tubería general, y, por lo tanto, es la distancia más corta desde punto C a la línea AB. Se traza una proyección auxiliar A adyacente a la vertical (lo mismo se puede hacer con proyección adyacente a la horizontal) con línea de referencia F-A paralela a la línea dada, para así representar a esa línea dada en su longitud verdadera. Se halla c_A y desde él se traza la perpendicular $c_A x_A$, con lo cual se conoce x_A, x_F y x_T, pudiéndose ya tener tres proyecciones de la distancia mínima solicitada CX. Pero ninguna de esas tres proyecciones da su longitud verdadera, bastando para encontrarla trazar una línea de referencia AB perpendicular a la línea $a_A b_A$, y al hallar la proyección auxiliar B tendremos una proyección de punto, al proyectarse $a_A b_A$ en un punto $a_B b_B$, apareciendo ya la distancia verdadera de $c_B x_B$, como línea más corta entre el punto y la recta.

Observación. Pero para encontrar el ángulo de pendiente o inclinación que tiene CX con la horizontal, es preciso hacer la construcción indicada, de proyección adyacente, no en la proyección vertical mencionada sino en la horizontal, como ya se indicó oportunamente. Por ello se construye la proyección C, adyacente a la horizontal, y así se tiene en su valor el ángulo de inclinación del empalme referido con relación a la horizontal.

PROBLEMAS. Grupo 11.

3·17. Trazar la línea más corta entre dos líneas que se crucen (método lineal)*

La línea más corta que une dos líneas que se cruzan (ni se cortan ni son paralelas) es la perpendicular a esas dos líneas dadas. La determinación de la longitud y de la posición de esa perpendicular es un problema muy corriente en la ingeniería. Cuando dos tuberías que se cruzan tienen que unirse por una tercera, se desea emplear solamente tuberías de simples Tes, en ángulo recto, y recodos, para usar la tubería más corta posible. Dos túneles pueden unirse lo más económicamente posible empleando el túnel más corto. La distancia que separa alambres atirantadores, conductores eléctricos, cables de mando, arriostramientos, etc., tiene que ser verificada para hallar siempre la distancia más corta entre esos elementos.

Análisis. Como la distancia solicitada tiene que ser perpendicular a ambas líneas, si una de ellas se representa con su verdadera longitud al proyectarse perpendicularmente, con otra proyección auxiliar, y quedar reducida a un punto, bastará solamente encontrar la distancia entre ese punto y la otra otra recta. Por lo tanto:

Representemos una de las líneas que se cruzan en su longitud verdadera y luego ésta en un punto.

Problema. La figura 3·24 expone las proyecciones horizontal y vertical, de un cable de mando del timón de dirección de un avión y el arriostramiento cercano del fuselaje. Las líneas centrales de esos elementos se representan

* Para otro método véase el artículo 4·21

aquí por AB y CD, que se cruzan teniendo que encontrar la mínima distancia entre estas dos líneas.

FASE 1. *Construir las proyecciones necesarias.*

Una de las dos líneas tiene que mostrarse en su longitud verdadera y luego como un punto. La proyección auxiliar, con línea de referencia paralela a una de las líneas dadas, puede trazarse adyacente a la proyección horizontal o a la vertical. En la figura 3-24 y con la proyección A se dibuja AB en su verdadera longitud, en $a_A b_A$, siendo perpendicular a ésta la mínima distancia pedida. Con la proyección B la línea AB queda proyectada en un punto, $a_B b_B$, luego la distancia $x_B y_B$, entre las dos líneas dadas, es la solicitada.

FASE 2. *Trazar esta línea más corta en las proyecciones dadas.*

Una vez hallada la distancia mínima es preciso dibujarla en las proyecciones de las líneas dadas. Por alineación se encuentra y_A, y la perpendicular $x_A y_A$ será la distancia más corta en la proyección A. Y trazando paralelas desde esta proyección A, podemos hallar $x_T y_T$ y $x_F y_F$. El ir localizando puntos y líneas por alineaciones sucesivas podría acarrear ir acumulando errores, por eso es prudente el ir comprobando las mediciones, desde las líneas de referencia en las proyecciones anexas. Así comprobaremos las distancias m, n, etcétera, en las proyecciones anexas correspondientes.

PROBLEMAS. Grupo 12.

3·18. Hallar la distancia entre dos líneas que se crucen, siempre que pase por un punto determinado

Este problema es sencillamente una variación del ya examinado antes, encontrar la distancia entre dos líneas que se cruzan, sólo que ahora al tener que pasar por un punto determinado ya no se puede exigir que sea la perpendicular entre las mismas. Se suele encontrar este problema en los trabajos de ingeniería, por ejemplo, cuando es necesario unir dos arriostramientos con un tercero rígido, al estar fijo en un punto determinado.

ANÁLISIS. Hay que trazar una proyección auxiliar en la que una de las líneas se exponga en su longitud verdadera, para que en otra se reduzca a un punto. Y en esta última, la línea que se busca además de tener que pasar por ese punto —resultado de la proyección de punto— también tiene que pasar por el punto dado como condición del problema. Entonces queda ya determinada esa línea. Luego la solución es:

Representar una de las líneas dadas como un punto.

PROBLEMA. Las líneas AB y CD, en la figura 3-25, representan las líneas centrales de dos arriostramientos que están unidos por un tercero que pasa por el punto X.

FASE 1. *Hacer a pulso cuatro bosquejos de posibles soluciones.*

Como una línea se ha de representar como un punto, el dibujante puede escoger cuatro soluciones posibles. La primera línea de referencia puede ser paralela a $a_T b_T$, $c_T d_T$, $a_F b_F$, y $c_F d_F$. Aunque las cuatro soluciones tienen que dar la misma respuesta, el estudiante debe aprender a examinar las diferentes posibilidades, para luego poder escoger. En algunos casos se puede hacer con suficiente seguridad la estimación de las nuevas proyecciones. Pero en otros problemas más complejos es preciso hacer a pulso diseños, como los indicados en la figura 3·25, los que son a veces una ayuda eficaz. En futuros problemas que implican más proyecciones es recomendable la ayuda de estos bosquejos.

FASE 2. *Situar la línea solicitada en proyecciones nuevas construidas con exactitud.*

La solución que se indica en la figura 3·25 se ha realizado representando la línea *AB* en la proyección *A* como un punto, habiendo antes proyectado esa línea en su verdadera longitud en la proyección *R*. Las direcciones de los rayos visuales para estas proyecciones se han tenido en cuenta sólo considerando a la línea *AB*. Llevándose a las nuevas proyecciones la línea *CD* y el punto *X*, con alineaciones y mediciones.

En la proyección *A*, la línea solicitada se ha trazado desde a_Ab_A al punto x_A para cortar a la recta c_Ad_A en el punto y_A, y por alineación tendremos el punto y_R; luego en la proyección *R* la línea que se precisa será la $y_Rx_Rz_R$, habiéndose encontrado z_R al prolongar y_Rx_R. Y por alineación determinamos esta línea en las proyecciones horizontal y vertical. En ninguna de las cuatro proyecciones aparece la línea *YXZ* en su magnitud verdadera.

PROBLEMAS. Grupo 13.

3·19. Proyecciones principales de los objetos con ejes inclinados

A veces es preciso mostrar, en las proyecciones horizontal y vertical, un objeto de forma regular no en una posición normal, sino inclinado o incluso vuelto. En general esto se hace fácilmente, la mayoría de las veces, para los primeros dibujos, empleando proyecciones auxiliares que representan a ese objeto en la forma más sencilla. La figura 3·26 presenta las fases consecutivas para la construcción de las proyecciones horizontal y vertical de un prisma hexagonal inclinado. (Una tuerca muy corriente y simplificada al omitir el paso de rosca y los bordes biselados).

FASE 1. *Establecer las proyecciones nuevas que son necesarias.*

Se precisa que el eje *MN* del objeto referido coincida con la línea inclinada *AB*, que figura en las proyecciones horizontal y vertical, y también que un lado del hexágono como *CD* sea horizontal. Las proyecciones más sencillas serán las que muestren el eje *AB* en su longitud verdadera y como un punto, siendo el primer paso dibujar las proyecciones auxiliares *A* y *B*.

FASE 2. *Dibujar al objeto en esas proyecciones nuevas.*

Para orientar correctamente el hexágono en la proyección *B* es necesario determinar la dirección del lado *CD* en esa proyección. Como este lado *CD* tiene que ser horizontal figurará en su longitud real en la proyección horizontal, y además aparecerá perpendicular a a_Tb_T al ser perpendicular al eje *AB*. Como la exacta situación de *CD*, en esas proyecciones, no es conocida empleamos una línea sustituta *EF* paralela a *CD*, que la suponemos colocada en cualquier sitio de las indicadas proyecciones, que luego trasladamos a las proyecciones *A* y *B*. Al construir el hexágono en la proyección *B* el lado c_Bd_B debe colocarse paralelo a e_Bf_B. Las proyecciones *A* y *B*, del objeto, dan la impresión aparente, que no es real, de que esas proyecciones auxiliares sean respectivamente horizontal y vertical.

FASE 3. *Situar los contornos del objeto en las proyecciones dadas, con los vértices.*

Para dibujar los seis vértices del hexágono, se han numerado estos en la

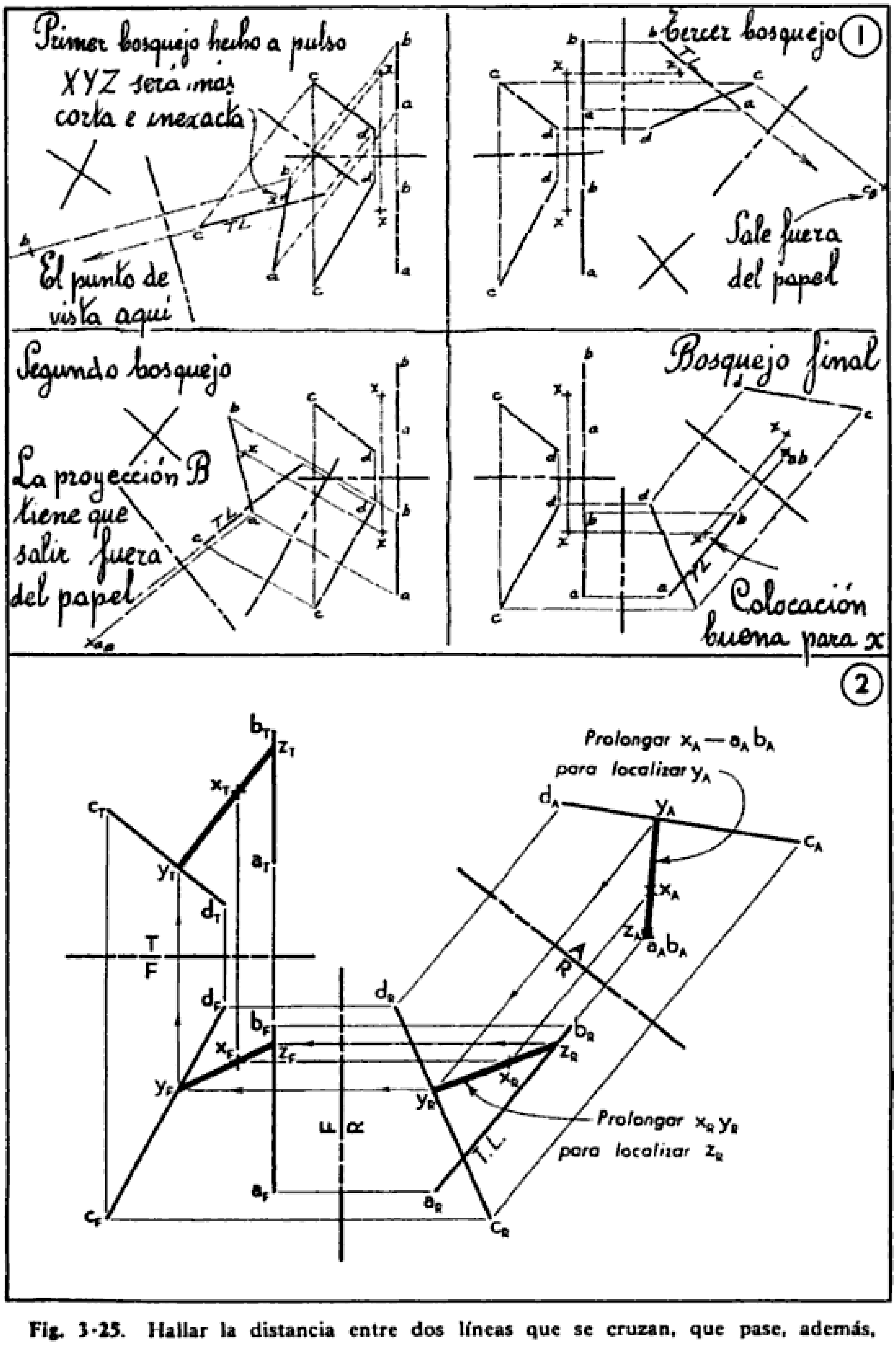


Fig. 3-25. Hallar la distancia entre dos líneas que se cruzan, que pase, además, por un punto dado.

proyección *B* y en la *A*, los que se han localizado en la proyección horizontal, trazando las paralelas desde la *A* con las medidas de la proyección *B*. Estos seis vértices por medio de alineaciones y medidas se pasan de la proyección horizontal a la vertical. Para evitar errores y como comprobación se verificará que las rectas que sean paralelas en el hexágono sigan siéndolo en todas las proyecciones.

FASE 4. *Localizar las líneas curvas en las proyecciones dadas.*

Los bordes del orificio de esta tuerca hexagonal aparecerán en forma elíptica en esas proyecciones horizontal y vertical; para su construcción se trazan una serie de puntos sobre el círculo de la proyección *B*, los que se situarán en la proyección *A*, para luego —como antes— trasladarlos a las proyecciones horizontal y vertical, para una vez unidos con curvas suaves dibujar las elipses. El número de puntos que se emplean, tomándolos en el círculo inicial, depende del radio que tenga el mismo, variando de 12 a 24 los puntos que se toman por cada círculo. Para facilitar la tarea de construcción, se escogen los puntos que estén simétricamente colocados con relación a los ejes, coincidiendo cada dos en las mismas alineaciones, paralelas y perpendiculares a la línea de referencia *A-B*. Esta línea *A-B* se supone que se traslada paralelamente a sí misma a la posición *A'-B'*, que pasa por el centro de la proyección *B*; asimismo la línea de referencia *T-A* se ha trasladado a la posición *T'-A'*, y los ocho puntos numerados simétricamente en la proyección *B* se pueden transportar ahora mucho mejor a la proyección horizontal, con relación a *T'-A'*, por medio de la distancia x, así como también se llevan a la proyección vertical.

La construcción reseñada anteriormente, para trazar las proyecciones principales de objetos inclinados, es evidentemente la más indicada para cuerpos de forma geométrica regular; pero el primer sistema de construcción, por simples proyecciones auxiliares, orientando al objeto en estas proyecciones, puede ser aplicado a los objetos de cualquier forma.

PROBLEMAS. Grupo 14.

3·20. Proyecciones auxiliares en una dirección determinada

ANÁLISIS. A veces la dirección visual de los rayos luminosos, para una proyección auxiliar determinada, tiene que ser paralela a una línea dada; la proyección que represente como un punto a esta dirección dada será la misma que muestre al objeto de que se trate en la dirección deseada. Por lo tanto:

Proyéctese como un punto a la línea que represente la dirección dada.

CONSTRUCCIÓN. En la figura 3·27 se pide se represente al objeto dado como debiera aparecer, si se le proyectase en una dirección visual paralela a la flecha. *MN*. Se traza primero la proyección auxiliar *A*, de dirección visual paralela a esa flecha, con lo que *MN* aparecerá en su verdadera longitud. Esta proyección *A*, adyacente a la horizontal elevada, muestra en otra posición más conveniente, para la construcción del objeto, al contorno de la superficie de la base. En la proyección auxiliar *B*, en la que *MN* se proyecta como un punto, el observador debe mirarla en la dirección de la flecha hacia arriba, es decir, desde *N hacia M*. Esta dirección *MN* puede ser tomada para cualquier posición relativa que tenga el objeto; solamente interesan los ángulos *R* y *S* que determinan la *dirección* que ha de tener esa línea dada, para determinar la proyección auxiliar correspondiente.

Para contemplar a ese objeto, en su posición normal y natural, en las cuatro proyecciones dibujadas hay que mover el libro y mirar al objeto poniéndolo, en cada proyección, hacia *arriba* en la dirección que marca esa flecha, para darnos cuenta exacta de cada posición en las cuatro proyecciones. Se gira en la figura 3·27 hasta que la flecha aparezca vertical, en cada situación; comprobándose que la proyección *B* es un excelente dibujo representativo del objeto dado. Se escogen los ángulos *R* y *S* para contemplarlo en la posición más ventajosa. Estas proyecciones, tales como la *B*, tomadas con direcciones oblicuas, se llaman proyecciones *axonométricas*. Otros métodos de construcción serán examinados próximamente.

PROBLEMAS. Grupo 15.

3·21. Proyecciones axonométricas y sus dibujos

Para ilustrar las proyecciones axonométricas diferentes que puedan obte-

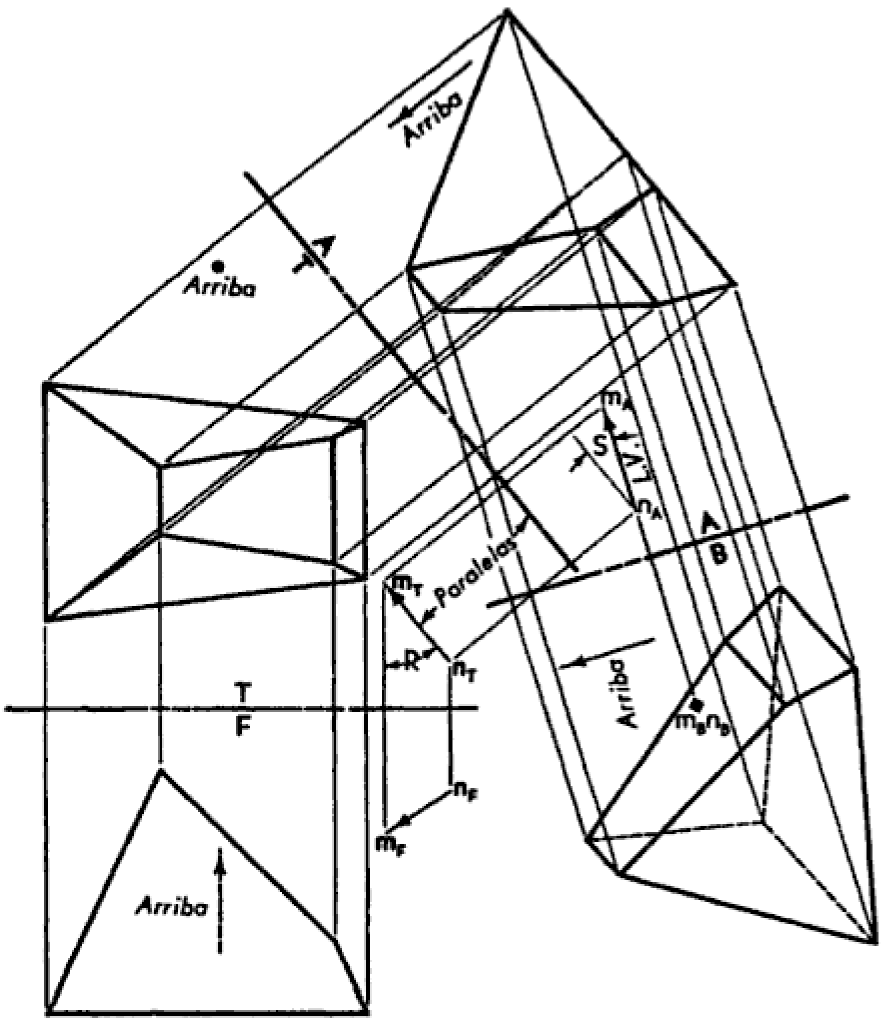


Fig. 3·27. Proyecciones auxiliares en una dirección determinada.

en una escala conveniente. La figura 3·29 expone varios dibujos axonométricos de un cubo en diversas escalas. Cada uno de estos cubos indicados es realmente mayor que los obtenidos en las proyecciones axonométricas, por haber sido dibujado a una escala sin reducción. Cuando de las tres dimensiones del cubo, dos han sido dibujadas a la misma escala y la tercera a otra escala, entonces el dibujo se llama *dimétrico*; y si las tres dimensiones han sido dibujadas a escalas distintas, el dibujo se denomina *trimétrico*.

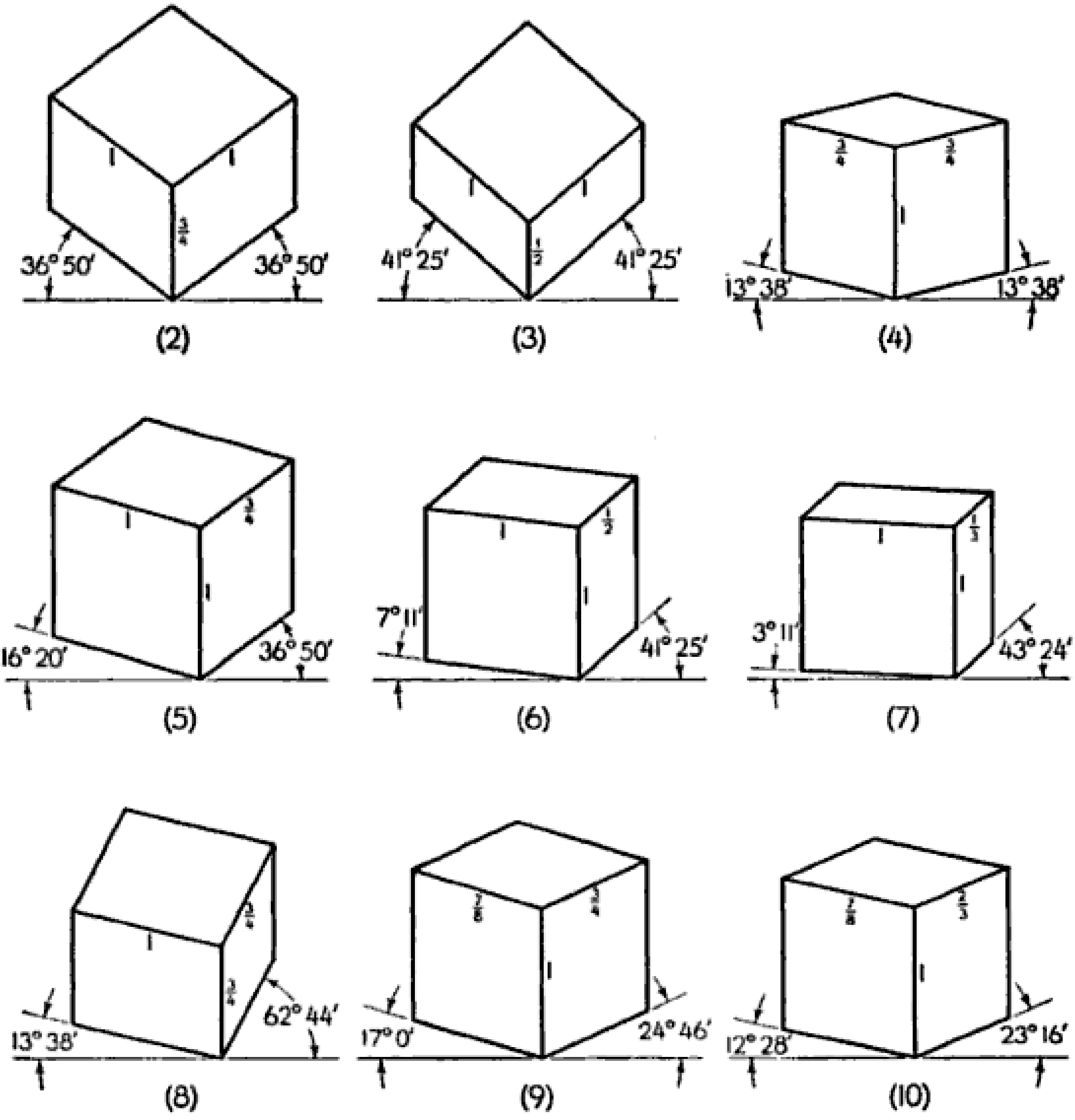


Fig. 3·29. Dibujos axonométricos de un cubo.

La tabla que se indica de «Proporciones de los dibujos axométricos» proporciona el valor de los ángulos R y S, el de los ángulos X e Y, según la razón con la que estén trazadas las escalas de las aristas, o lados del cubo, x, y, z. Como se ve en la proyección B de la figura 3·28, X es el ángulo del eje del lado izquierdo, Y es el ángulo del eje del lado derecho, x es el lado izquierdo, y el derecho, y z el vertical del cubo indicado.

La figura 3·30, como aclaración gráfica del método referido, presenta la construcción de un dibujo trimétrico del mismo objeto que se presentó en la figura 3·27. El tipo de dibujo que se desee se selecciona de los modelos de cubos presentados en la figura 3·29. Para esa construcción de la figura 3·30 se ha empleado el cubo núm. (9) de esos modelos. Por la tabla vemos que los ángulos visuales son: *R* de 39°8' y el *S* de 22°3'. En estas direcciones proyectamos las tres dimensiones del cubo, *x*, *y*, *z*, pero con las escalas de reducción respectivas de 7/8, 3/4, y 1. Si el lado *z* es vertical, *x* estará inclinado a 17°0', con la horizontal, así como el lado *y* que formará con esa horizontal un ángulo de 24°46'. Con estos valores para los ángulos de los ejes, iniciamos la construcción de la figura 3·30, partiendo del origen *O*, formándose los ángulos dichos.

A continuación hay que «encasillar» el objeto dado, por las líneas de trazos, en las proyecciones horizontal y vertical de la figura. Esta caja imaginaria, que comprende exactamente al objeto, se puede ya construir en el dibujo trimétrico del lado derecho, también con líneas de trazos. Los 7/8 de la longitud $o_T x_T$ se trasladarán al dibujo en el eje *OX*; los 3/4 de la anchura $o_T y_T$ se tomarán en el eje *OY*; y finalmente en el eje *OZ*, de altura vertical, se lleva la altura $o_F z_F$, sin reducción. Con paralelas a estas tres mediciones se completa el paralelepípedo del dibujo.

Para facilitar la tarea de reducir las dimensiones del objeto dado a las escalas reseñadas, podemos emplear el diagrama triangular que consta en la figura 3·30. Se ha tomado una distancia, *AB*, de longitud mayor que cualquier medida que se haga en la caja indicada; en el punto *B* se traza una perpendicular *BC* que representa los 7/8 de *AB*; y la distancia *BD* tomada en esa perpendicular representa los 3/4 de *AB*. Se puede dividir el lado *AB* en pequeñas partes, y por las divisiones trazar las perpendiculares. Todas las medidas verticales que se tomen en ambos triángulos, serán o los 7/8 o los 3/4 de las distancias horizontales, que se midan desde los pies de esas verticales hasta el

PROPORCIONES DE LOS DIBUJOS AXONOMÉTRICOS

Clase de dibujo	Razón de las escalas	Dirección de los ángulos visuales		Angulos de los ejes en los dibujos		Escalas exactas de reducción
		R	*S*	*X*	*Y*	
(1) Isométrico	$x = 1,\ y = 1,\ z = 1$	45°	35°16′	30°	30°	0,8165
(2) Dimétrico	$x = 1,\ y = 1,\ z = 3/4$	45°	48°30′	36°50′	36°50′	0,8835
(3) Dimétrico	$x = 1,\ y = 1,\ z = 1/4$	45°	61°52′	41°25′	41°25′	0,9428
(4) Dimétrico	$x = 3/4,\ y = 3/4,\ z = 1$	45°	14°2′	13°38′	13°38′	0,9701
(5) Dimétrico	$x = 1,\ y = 3/4,\ z = 1$	32°2′	27°56′	16°20′	36°50′	0,8835
(6) Dimétrico	$x = 1,\ y = 1/2,\ z = 1$	20°42′	19°28′	7°11′	41°25′	0,9428
(7) Dimétrico	$x = 1,\ y = 1/3,\ z = 1$	13°38′	13°16′	3°11′	43°24′	0,9733
(8) Dimétrico	$x = 1,\ y = 3/4,\ z = 3/4$	19°28′	43°19′	13°38′	62°44′	0,9701
(9) Trimétrico	$x = 7/8,\ y = 3/4,\ z = 1$	39°8′	22°3′	17°0′	24°46′	0,9269
(10) Trimétrico	$x = 7/8,\ y = 2/3,\ z = 1$	35°38′	17°57′	12°28′	23°16′	0,9513

origen, *A*. Así *GH* vale 7/8 de *AG*; y *EF* representa los 3/4 de *AE*. Y al revés dada cualquier distancia, que se llevará sobre *AB*, encontraremos en las distancias verticales correspondientes a la misma sus distancias reducidas de 7/8 o de 3/4.

Una línea oblicua *MN* del objeto, puede ser trazada en el dibujo partiendo de las proyecciones, encontrando los puntos *M* y *N*, con la ayuda del diagrama triangular. El punto *M* está situado en la superficie superior del objeto, con las coordenadas *a* y *b* en relación con el extremo x_T del cuerpo, en la proyección horizontal. Tomemos en el dibujo, a partir del vértice superior izquierdo,

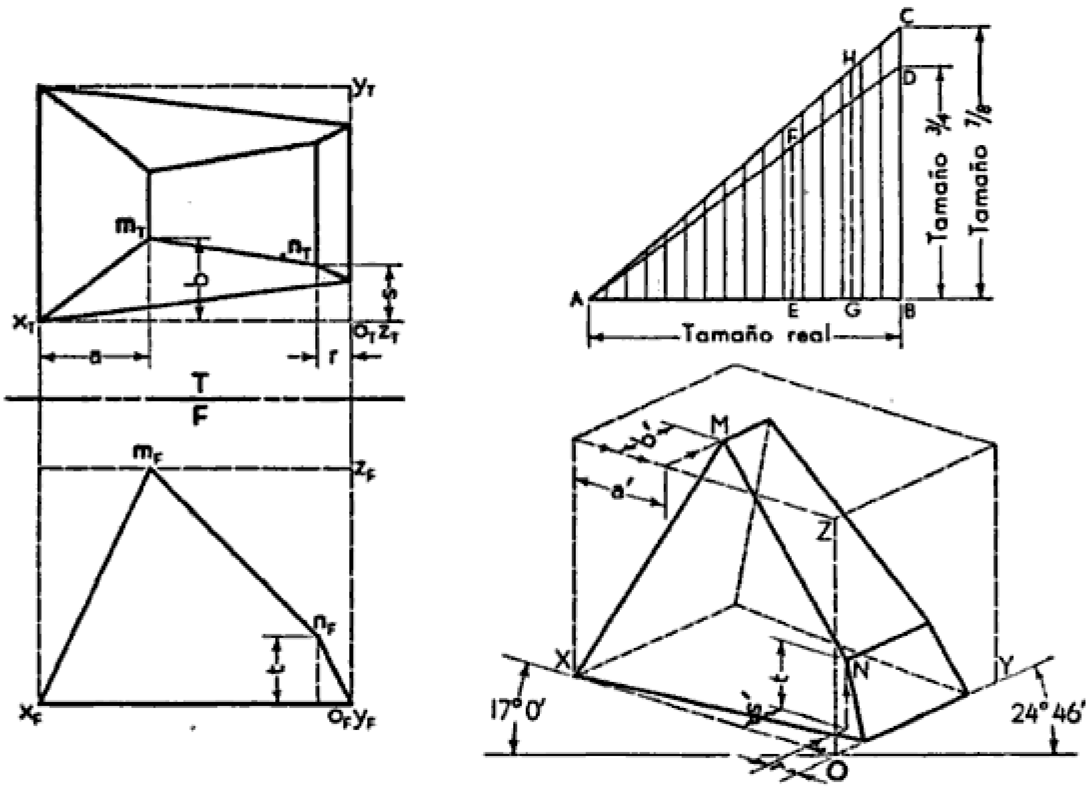


Fig. 3·30. Construcción de un dibujo trimétrico.

las coordenadas *a'* (7/8 de *a*) y *b'* (3/4 de *b*) y tendremos el punto *M* del dibujo. Del mismo modo podemos trazar el punto *N*, que está en el interior del paralelepípedo que abarca el reseñado objeto. Para ello medimos en la proyección horizontal las coordenadas *r* y *s*, con relación al origen o_T, y en la proyección vertical se mide la altura *t*. Luego, en el dibujo, se toma *r'* (7/8 de *r*), a partir de *O* y sobre el eje *X*; por el punto obtenido se traza una paralela al eje *Y*, se toma *s'* (3/4 de *s*); por ese punto del interior que hemos logrado, y en dirección del eje *Z* hacia arriba se mide *t'*, que es igual a la coordenada *t* medida antes, teniendo ya el punto *N*; obteniendo con esto la línea oblicua del cuerpo *MN*. Del mismo modo podemos ir trazando los diferentes vértices de ese cuerpo, y así complementar el dibujo pedido.

Ahora el lector, con el dibujo completo, puede compararle con la proyección axonométrica *B* de la figura 3·27. Se ve que son iguales, menos por el tamaño, ya que, según la tabla dicha, los ángulos *R* y *S* se tomaron por 39°8′ y 22°3′;

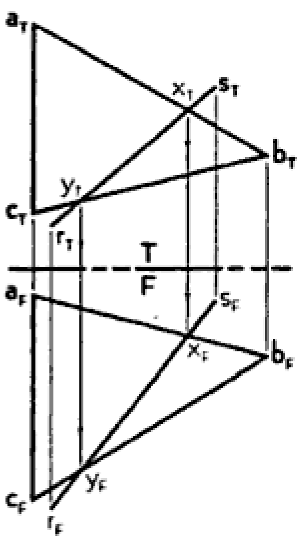
y todas las distancias lineales que se tomen en la proyección *B* serán 0,9269 de las correspondientes del dibujo trimétrico.

Aunque se ha tratado del dibujo trimétrico, con todo detalle, son los dibujos dimétricos los que se emplean más corrientemente, por tener que usar solamente una escala de reducción. Para los detalles ulteriores de construcción, que desee el estudiante interesado, puede consultar muchos textos que están publicados sobre los indicados dibujos de ingeniería.

PROBLEMAS. Grupo 16.

mo plano de un modo ligeramente diferente. En la figura 4·1(*c*) se han prolongado las líneas *AC* y *BC*, más allá del vértice *C*, formando un par de líneas que se cortan, que también definen al plano; y de paso se demuestra que los puntos *E* y *F* pertenecen a ese plano, al pasar por ellos la prolongación de esas líneas del plano. En la figura 4·1(*d*) por el punto *C* se ha trazado una línea *CD* paralela a la *AB*, que acaba supuestamente en el punto *D*, con lo que se ve que dos líneas paralelas definen también un plano.

Tres puntos que no estén en línea recta, determinan un plano, otros puntos estarán en ese mismo plano siempre que una construcción y demostración seguras así lo garantice (véase artículo 4·5). Las líneas que definen un plano son las paralelas o las que se cortan, y si éstas tienen su punto de intersección fuera de los límites del papel deberá demostrarse que este punto pertenece al plano, por la construcción que vimos en la figura 3·19.



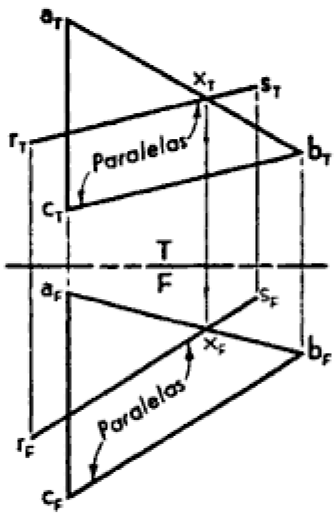


Fig. 4·2. Situación de una línea en un plano. **Fig. 4·3.** Líneas paralelas situadas en un plano.

4·2. Situación de una línea en un plano

Si se da un plano, definido y representado por uno de los métodos antes reflejado, es necesario corrientemente situar otras líneas en el mismo. En la figura 4·2, por ejemplo, el plano está definido por los puntos *A*, *B* y *C*, unidos formando un triángulo. La línea r_Ts_T es la proyección horizontal de una línea que debe estar situada en el plano *ABC*, pero la situación de r_Fs_F es desconocida.

La línea dada r_Ts_T corta a las líneas a_Tb_T y b_Tc_T en los puntos x_T e y_T, respectivamente. Como las rectas *AB* y *RS* se cortan en el punto *X*, del plano que forman, la proyección x_F tendrá que estar en a_Fb_F y exactamente debajo de x_T, en la perpendicular a la línea *T-F* desde x_T, luego se encontrará en la intersección de ambas líneas. Lo mismo encontraríamos el punto *Y*, en su proyección y_F; así tendremos la proyección vertical r_Fs_F de *RS*.

En la figura 4·3, proyección horizontal, la línea r_Ts_T corta a la a_Tb_T en el punto x_T y además es paralela a b_Tc_T. Se halla, como antes, x_F y según la regla 9, cuando dos rectas son paralelas lo son en todas sus proyecciones, al ser paralelas *BC* y *RS*, bastará trazar por x_F una paralela, r_Fs_F a b_Fc_F.

ción deseada, en sus longitudes verdaderas.

Líneas horizontales. Supongamos que se pide trazar una línea en un plano *ABC*, figura 4·5, debiendo figurar en su longitud verdadera en la proyección horizontal del plano dado. Para ello se precisará que la línea sea horizontal, y paralela a la línea de referencia *T-F* en la proyección vertical. Cualquier línea horizontal, tal como la $c_F m_F$, se puede trazar en la proyección vertical, y encontrar m_F y m_T, proyecciones del punto *M* situado en la línea *AB*. Con esto tendremos la línea $c_T m_T$, proyección horizontal en longitud verdadera de la línea *CM* situada en el plano *ABC*. Podría trazarse otra línea horizontal en el plano *ABC*, más arriba o más abajo que la línea *CM*, tal como la *PQ*, pero la proyección horizontal $p_T q_T$ tendría que tener la misma dirección que $c_T m_T$, o sea ser su paralela. Es preferible la línea *CM*, en vez de la *PQ*, por ser más larga y proporcionar mayor seguridad, y de construcción más sencilla por tener que situar solamente un punto, el *M*.

Líneas en un plano vertical. De forma similar a la enunciada, si la línea

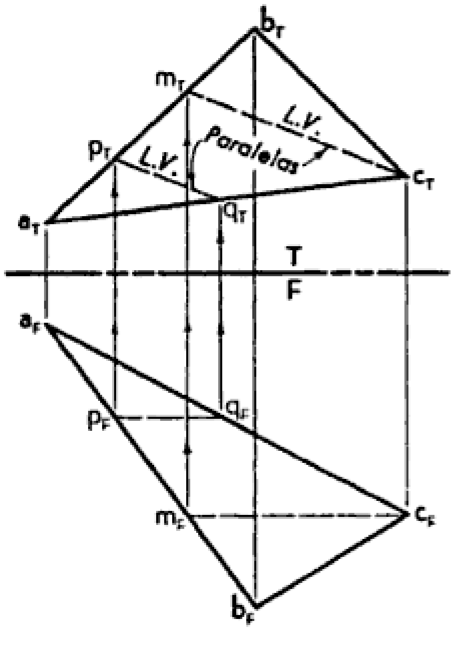


Fig. 4·5. Trazado de líneas horizontales en un plano.

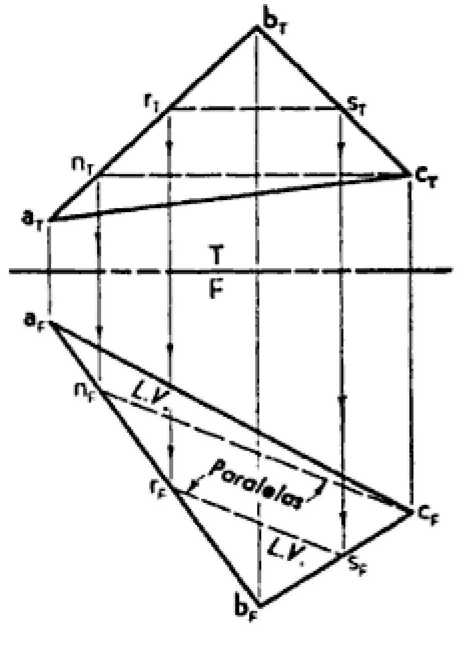


Fig. 4·6. Líneas situadas en un plano vertical.

solicitada tiene que estar en su longitud verdadera en la proyección vertical tendrá que ser paralela a la línea de referencia *T-F*, en la proyección horizontal, como se puede ver en la figura 4·6. Trazando $c_T n_T$ se obtiene $c_F n_F$ en longitud real en la proyección vertical. Cualquier línea del plato vertical, tal como *RS*, tendrá que tener en la proyección vertical la misma dirección que *CN*.

Resumen. En general, para situar en un plano una línea que se presente en su longitud verdadera en una proyección dada, esta línea tendrá que figurar en un plano paralelo a la línea de referencia, en una proyección adyacente. En la figura 4·7 la línea de perfil *BT*, que se muestra en su longitud real en la proyección R, se supuso en la proyección adyacente vertical, que era paralela a la línea de referencia *F-R*. La línea *BV*, que en la proyección *A* figura en su longitud verdadera, se supuso primeramente, en la proyección horizontal, que era paralela a la linea de referencia *T-A*.

4·4. Orientación de un plano

La *orientación* de un plano es el ángulo de dirección que tenga una línea horizontal de ese plano. Este término se emplea por los ingenieros de minas, y por los geólogos, para indicar la dirección o rumbo del estrato o vena, del filón que se explote de la corteza terrestre. Esto se examina más ampliamente

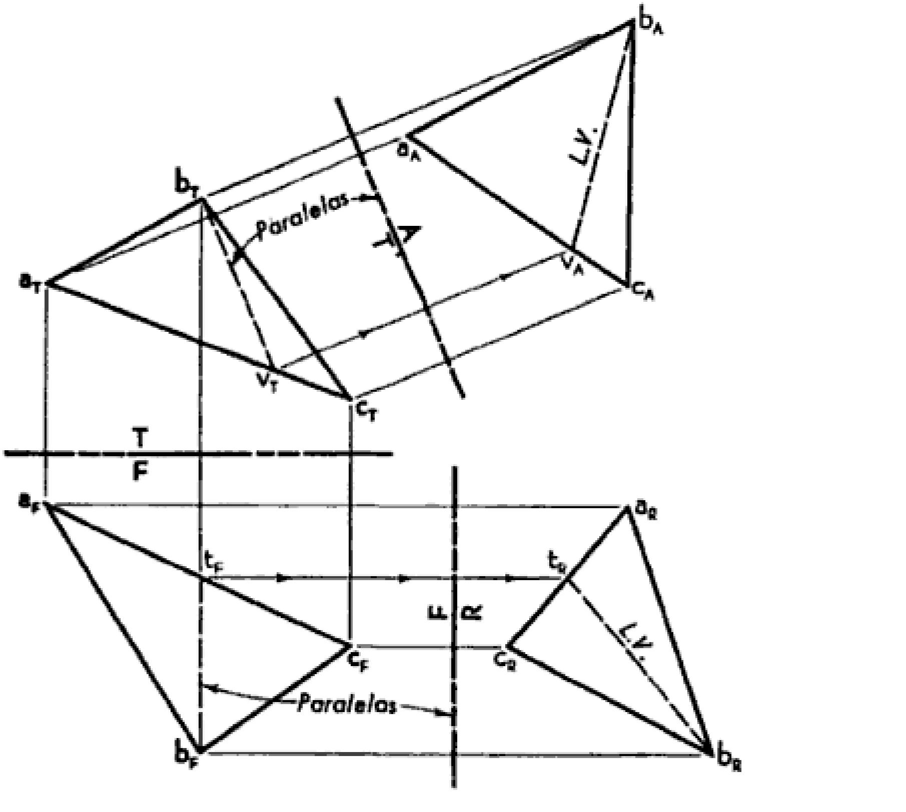


Fig. 4·7. Trazar en un plano una línea que figure en otro plano en su longitud verdadera.

en el capitulo 12, pero la orientación de un plano, en general, se refiere a su dirección o ángulo que forme en proyección horizontal.

En la figura 4·8 los puntos *A*, *B* y *C* representan tres puntos de un plano dado. Para determinar la dirección de este plano, supongamos una línea horizontal del mismo, tal como *AD*. Entonces $a_T d_T$ será una *línea de orientación* del plano, cuyo ángulo de dirección, tanto de esta línea como del plano, es de 65° NE, que se suele poner sobre esa línea, y aunque todas las líneas paralelas a ésta tienen la misma orientación, se suele tomar esta línea *AD*, para fijar la dirección, por ser la más larga y de localización segura.

PROBLEMAS. Grupo 17.

4·5.· Situar un punto en un plano

Para situar un punto en un plano dado, el punto debe primeramente estar situado en alguna línea de ese plano. Si el punto requerido no está situado en una de las líneas dadas del plano, entonces alguna línea nueva tiene que suponerse exista en el plano que contenga al punto dado. Como existen un número infinito de líneas, en un plano, que pasan por un punto dado, habrá un número infinito de medios para localizar al punto.

Supongamos en la figura 4·9, que el punto X pertenece al plano de las líneas paralelas AB y CD, dándonos su proyección vertical x_F y solicitándose la situación de otra proyección x_T. Para ello se traza por x_F una línea m_Fn_F, en cualquier dirección, pudiéndose hallar m_Tn_T. Por x_F se traza la

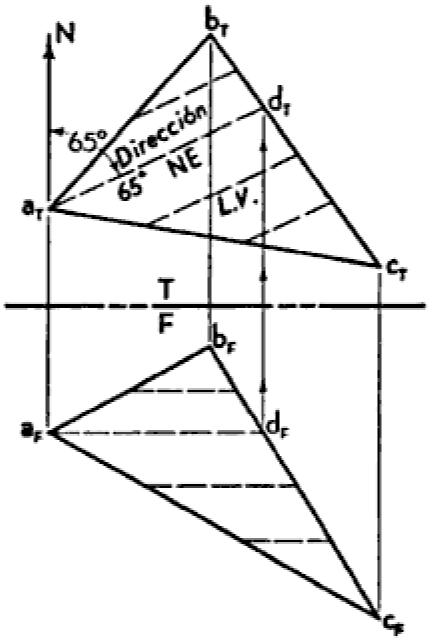


Fig. 4·8. Orientación de un plano.

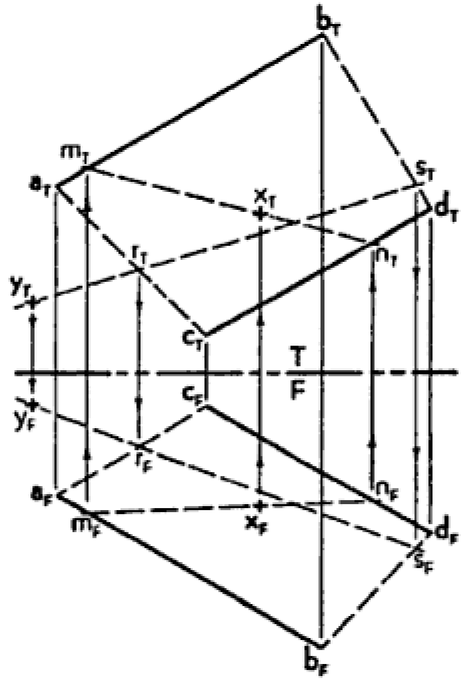


Fig. 4·9. Situación de un punto en un plano.

paralela a la dirección m_Fm_T y al cortar a m_Tn_T se tendrá x_T.

Si suponemos se nos da otro punto y_T, por el cual no es factible trazar una línea que corte, sin salirse del dibujo, a las paralelas AB y CD, entonces podemos unir éstas entre sí, por las rectas a_Tc_T y b_Td_T, y ya desde y_T se puede trazar r_Ts_T que se traslada a r_Fs_F, y desde y_T se puede encontrar y_F.

Consideremos ahora, en la figura 4·10, que en el plano de las paralelas AB y CD está situada la figura $MNOP$, se nos da $m_Tn_T\,o_Tp_T$ y se solicita su proyección vertical. Por m_T, p_T y o_T se trazan paralelas a a_Tb_T y c_Td_T, obteniéndose los puntos r_T, s_T y t_T; al cortar estas paralelas a la línea a_Tc_T, que une a_T y c_T. A continuación se trasladan esos puntos sobre a_Fc_F; con lo que se logran las proyecciones r_F, s_F y t_F; por estas proyecciones se trazan paralelas a a_Fb_F y c_Fd_F. Bastará encontrar sobre esas paralelas y las que se tracen desde m_T,

n_T, p_T y o_T, las proyecciones solicitadas de los puntos m_F, n_F, p_F y o_F. Siendo la recta *MN* paralela a las dadas. Como comprobación se puede prolongar la línea *OP* hasta encontrar a las *AC* y *CD*, en los puntos *E* y *F*, cuyas proyecciones e_F y f_F deben encontrarse en la prolongación de $o_F p_F$.

PROBLEMAS. Grupo 18.

4·6. Un plano que se proyecta como una línea (proyección fundamental, tipo III)

Si un plano es vertical, su proyección horizontal será una línea, la que representa no sólo el canto del plano, sino toda la superficie del mismo proyectada en esa dirección. Y la proyección vertical de ese plano vertical, si no se

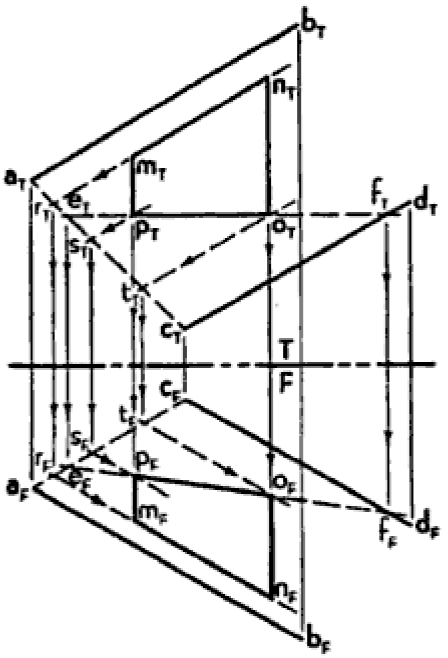


Fig. 4·10. Trazados de puntos en un plano.

marcan los límites del mismo, es toda la superficie ilimitada que se representa en el plano frontal vertical de proyección; y si se marca el contorno, aparecerá el plano que se proyecta en su forma real.

Así en la figura 4·11(*a*), en el plano horizontal que se representa en la parte superior de la línea *T-F*, aparece la *línea* o *canto* del plano vertical en él proyectada. Y toda la superficie vertical, que se indica debajo de *T-F*, es la proyección vertical del plano vertical supuesto. Una línea de ese plano puede ser la $r_T s_T$ - $r_F s_F$. Todas las líneas de ese plano están proyectadas en la dirección $r_T s_T$, y puede ser arbitraria la colocación de la proyección vertical $r_F s_F$. Un punto *X*, de ese plano vertical, tendrá sus proyecciones en x_T (siempre en la dirección indicada) y en x_F, un punto cualquiera elegido al azar. El ángulo de dirección de este plano vertical será el mismo que el de la línea $r_T s_T$

En la figura 4·11(*b*) se representa en el plano vertical *F* un plano perpendicular a él, y por ello esa proyección será una línea $r_F x_F$, ilimitada, siendo su gido, de ese plano, en otra proyección con línea de referencia paralela a ella, se la tendría en su verdadera longitud, para que en la otra proyección perpendicular se redujese a un punto, y todo el plano a una línea. Esta proyección de un plano oblicuo en una línea simplifica muchos problemas y por ello es una *proyección fundamental,* del tipo III. La siguiente regla indica el método principal.

REGLA 11. REGLA DE PROYECCIONES LINEALES. *Si una linea de un plano se proyecta según un punto, indica que ese plano se proyectará según una línea.*

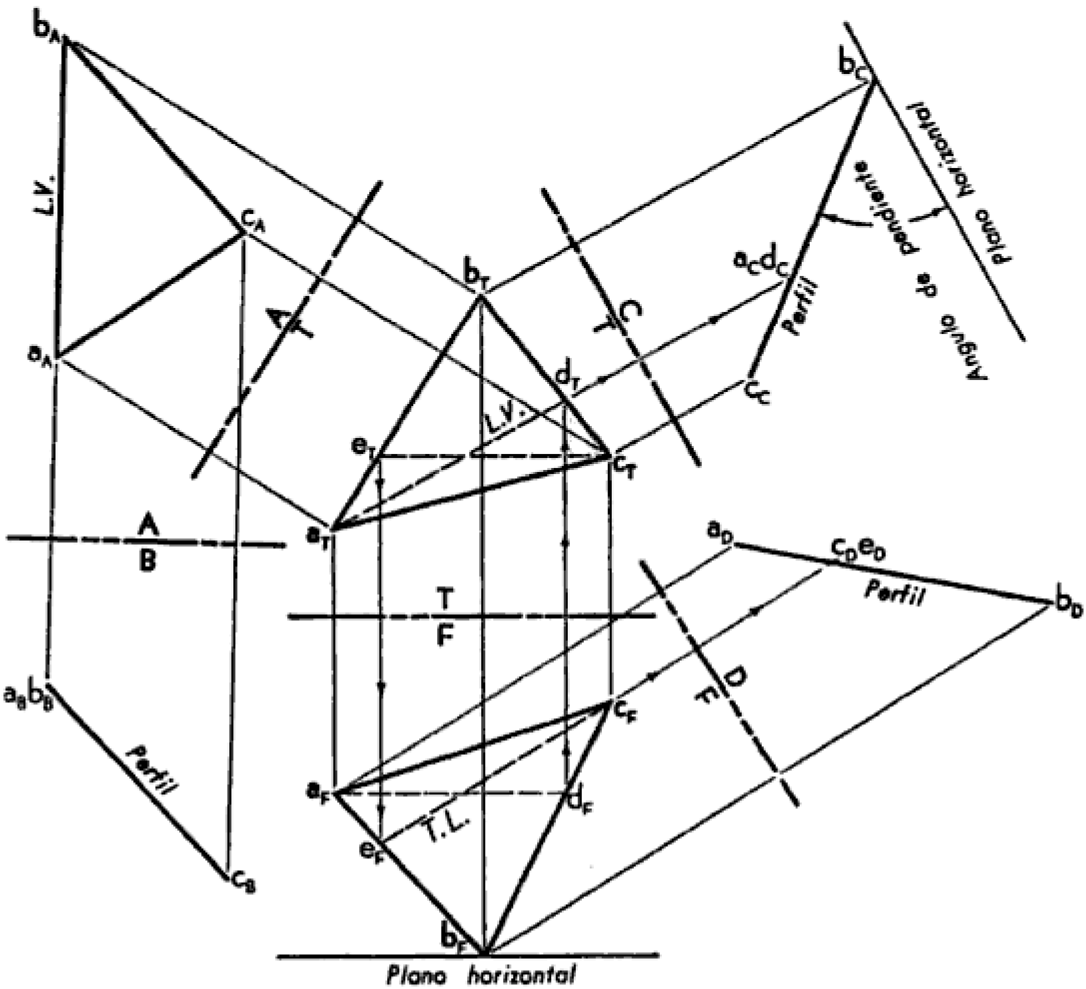


Fig. 4·12. Plano oblicuo en proyección de canto o perfil.

Según esta regla se puede emplear cualquier línea de un plano para proyectarla como un punto, luego si buscamos en ese plano una línea que figure en su longitud verdadera nos ahorraremos tener que hacer la proyección auxiliar *A*, de la figura 4·12, bastando con hacer la proyección de punto. En el plano *ABC*, del espacio, tenemos la línea *AD* que es paralela al plano horizontal, luego su proyección horizontal $a_T\,d_T$ será igual a *AD*, y su proyección vertical $a_F\,d_F$ será paralela a la línea de referencia *T-F*. Si hacemos, ahora, la proyección diente en su verdadero valor.

Pasemos a la figura 4·13(*a*). Según vimos en (*c*) para determinar el ángulo de pendiente, se precisaba una proyección vertical, en la que el plano dado del caballete y el plano horizontal se proyectasen como líneas. Para ello el *plano horizontal* tiene que verse con una línea visual horizontal, y si el plano dado aparece como una línea es señal que en otra proyección adyacente una línea de ese plano figuraba en su longitud verdadera, y para lo cual en otra proyección adyacente esa misma línea tendría que ser paralela a otra línea de referencia. Todo este razonamiento nos induce la construcción a emplear en la figura (*a*), en la que vemos la superficie del caballete *ABCD*, en sus proyecciones, y en la del plano horizontal, los lados $a_F b_F$ y $d_F c_F$ son horizontales poniéndose paralelos a ellos la línea de referencia *T-F*. Con esto las proyecciones horizontales $a_T b_T$ y $d_T c_T$ expresarán la longitud verdadera de los lados *AB* y *CD*. Si hallamos en una vista elevada una proyección adyacente *A*, con una línea visual paralela a los lados de longitud real, los lados dichos *AB* y *CD*, se proyectarán como puntos, $c_A d_A$ y $a_A b_A$, y en esa proyección aparecerán como líneas los dos planos, el dado y el horizontal, así como el ángulo de pendiente en su verdadero valor.

Si resumimos el análisis anterior tendremos la regla siguiente:

> Regla 12. Regla para obtener la pendiente de un plano. *El ángulo de pendiente de un plano se puede determinar solamente en la proyección elevada en donde ese plano se proyecte de perfil.*

Se puede observar la analogía entre esta regla y la regla 7 (art. 3·7). *No es suficiente* que el plano dado se represente como una línea, tiene que proceder de una proyección horizontal elevada, para que este plano y uno horizontal se proyecten de perfil simultáneamente. En la figura 4·12, el plano *ABC* aparece, de perfil, en tres proyecciones, pero sólo en la *C* elevada y adyacente a la horizontal se puede medir el ángulo de pendiente de ese plano.

En la figura 4·13(*a*), en la proyección *A*, se ve el ángulo de pendiente de la línea *BC* y del plano; la línea *BC*, y cualquier paralela, es una línea de mínima longitud, luego su pendiente será la máxima, que será la del plano. Se ve que estos lados, *BC* y *AD*, son perpendiculares a los otros lados que son horizontales, luego serán verticales. Luego las *líneas de máxima pendiente* de un plano son las perpendiculares a las horizontales del mismo.

4·8. Pendiente del plano del estrato

La *pendiente* del plano del estrato o vena, es un término de geología que indica el ángulo de pendiente que tiene el plano en que está ese estrato. Para determinar una vena hay que fijar su rumbo, o ángulo direccional horizontal, y su pendiente. Hay que fijar la situación del estrato, con su rumbo y pendiente. Los límites que comprenda la superficie del mismo y extensión, sin embargo, no quedan indicados. El empleo de la pendiente en las aplicaciones de minería, se trata con más detalle en el capítulo 12.

PROBLEMAS. Grupo 19.

4·9. La línea más corta desde un punto a un plano

ANÁLISIS. La distancia más corta desde un punto a un plano, es la perpendicular trazada desde ese punto al plano. Si se proyecta el plano como una línea, bastará trazar la perpendicular desde el punto a la línea. La dirección visual será paralela al plano, tomando la línea más corta del plano para que aparezca en su verdadera longitud. El método requiere que:

Se muestre el plano dado como una línea.

CONSTRUCCIÓN. La figura 4·14 nos señala un plano *ABC* y el punto *X*. Como hay que proyectar al plano como una línea, y el medio más rápido es partir de las proyecciones horizontal o vertical, como vimos en la figura 4·12 con las proyecciones *C* y *D*. La línea *AB* del plano es horizontal, luego $a_F b_F$ expresará su real longitud, tomando la línea de referencia *F-A* perpendicular a ella, para obtener en la proyección *A* la perpendicular solicitada $x_A p_A$, que determina

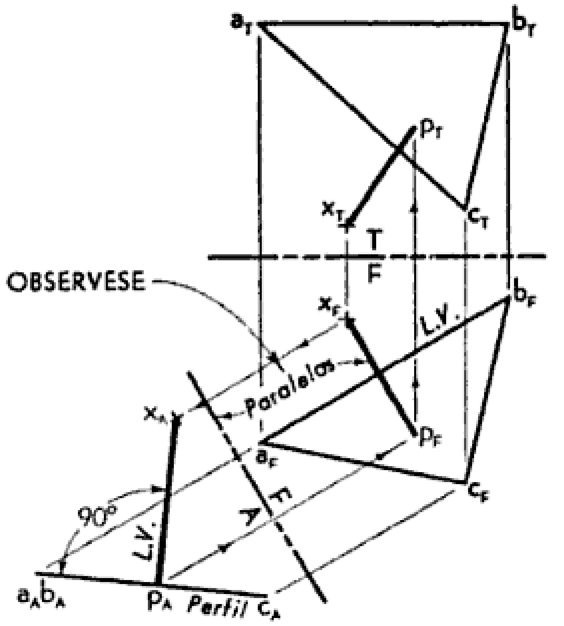


Fig. 4·14. La línea más corta trazada desde un punto a un plano.

el punto p_A. Como $x_A p_A$ es una línea en su verdadera longitud $x_F p_F$ tiene que ser paralela a *F-A*, con lo que se determinará p_F, y por alineaciones y medidas iguales se encontrará p_T, y las proyecciones de la línea pedida *XP*.

Esta perpendicular *XP* se puede obtener directamente, de las proyecciones dadas, sin necesidad de convertir al plano en proyección lineal, considerando este método un poco más tarde (art. 4·32).

PROBLEMAS. Grupo 20.

4·10. Distancia más corta desde un punto a un plano con una pendiente determinada

Ya vimos que la distancia más corta de un punto a un plano era la perpendicular trazada desde ese punto (art. 4·9), pero en algunos casos el ángulo de pendiente que tiene esa perpendicular puede no ser deseable, y por ello tener que prescindir de esa distancia mínima, para tener que recurrir a otras que tengan una pendiente determinada que sea más conveniente. En minería, por ejemplo, las galerías que conducen a los yacimientos de carbón o a las venas de los minerales, por economía deberían ser las más cortas posibles, pero tienen que tener pendientes determinadas para los desagües, ventilación y transporte de los minerales. A esas galerías se las considera como las líneas más cortas, con una *pendiente determinada*, desde el punto de entrada al plano de

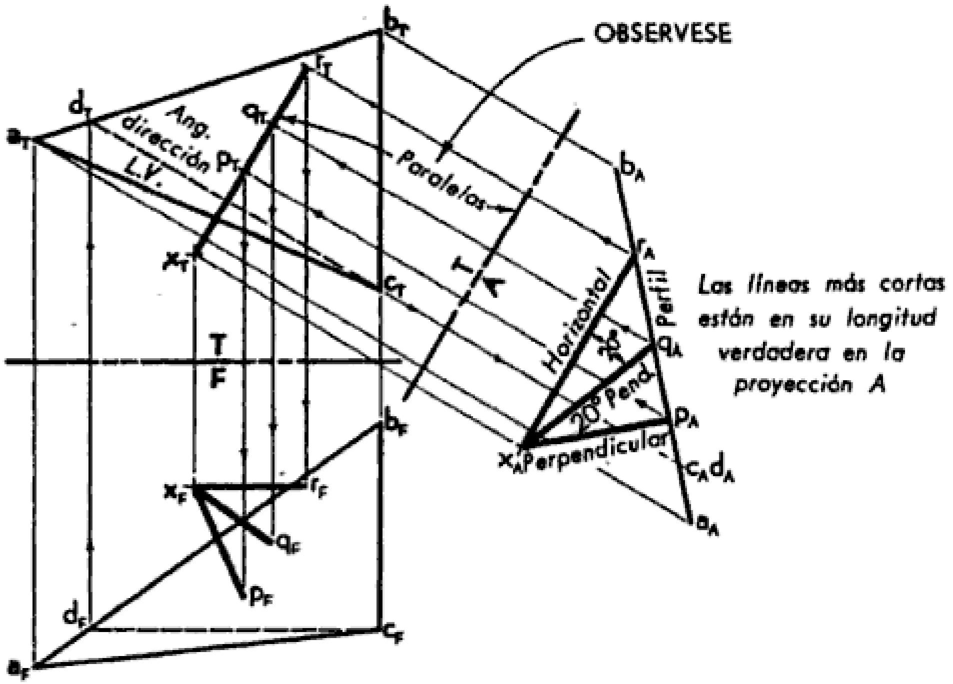


Fig. 4·15. Distancia más corta de un punto a un plano con una pendiente determinada.

los estratos. Las definiciones de algunos de estos términos, de uso en minería, se explican en el artículo 12·3.

Análisis. El plano dado tiene que aparecer como una línea, pero ahora es esencial que en esa proyección se refleje la pendiente determinada que se solicita, que ya dijimos tiene que ser medida en una proyección derivada de una horizontal elevada, por lo tanto:

Hay que representar al plano como una línea desde una proyección elevada.

Problema. En la figura 4·15, los puntos *A, B* y *C*, representan tres puntos conocidos de la superficie superior de una capa de carbón. El punto *X* representa la entrada a la mina desde un punto de la superficie del suelo. Se necesita situar: (1) la galería horizontal más corta; (2) la galería inclinada más corta que tenga un ángulo de pendiente de 20°, y (3) la galería más corta (perpendicular) desde el punto *X* al plano *ABC*, que representa la superficie del lecho del carbón.

CONSTRUCCIÓN. Supongamos que la línea *CD* es horizontal, luego en la proyección horizontal tendrá la magnitud real, para que en la proyección *A* se convierta en un punto, mientras el plano *ABC* pasa a ser una línea. Desde el punto x_A cada una de las galerías que se necesitan encuentran al plano en los puntos r_A, q_A, y p_A. Y como cada galería figura con su *verdadero valor* en esta *proyección elevada*, también marcará cada una su ángulo de pendiente (regla 7). La galería horizontal se traza paralela a la línea de referencia *T-A*, la galería con pendiente de 20° formará con la horizontal o con *T-A* ese ángulo de 20°, y la galería más corta será la perpendicular al plano.

Es interesante observar que todas estas líneas más cortas, independientemente de su pendiente, tienen el mismo *ángulo de dirección*, al estar en un plano perpendicular a la línea que indica el ángulo de dirección del plano de la capa del filón. Y también es de observar que los puntos p_T, q_T, y r_T se localizan al ver que las rectas x_Tp_T, x_Tq_T y x_Tr_T tienen que ser paralelas a la línea de referencia *T-A*.

PROBLEMAS. Grupo 21.

4·11. Tamaño verdadero de un plano (proyección fundamental, tipo IV)

Al final del artículo 3·6 quedó establecido que solamente había cuatro clases de proyecciones fundamentales, tres de las cuales han sido ya explicadas, sirviendo además de medio para resolver numerosos problemas. Con esta proyección tipo IV completamos nuestro equipo básico de útiles que tenemos que emplear. Podríamos ahora, también, llamar la atención sobre la interdependencia de la serie de los proyecciones fundamentales que hemos citado; un plano no puede proyectarse como una línea mientras que alguna línea de ese plano no se proyecte como un punto; y una línea no se proyectará como un punto hasta que no figure en su longitud verdadera. Tiene que observarse siempre este orden de construcción, que ahora veremos con esta proyección del tipo IV, que debe seguir a la proyección tipo III, ya tratada.

Para ver a una superficie plana en su verdadero tamaño y forma, el observador tendrá que mirarla en una dirección perpendicular a ese plano, y como se supone que el ojo del observador está en el infinito, todos los rayos visuales que van a todos los puntos de su superficie serán paralelos, siendo equidistantes del ojo todos los puntos del plano. Una dirección visual que sea perpendicular a un plano puede determinarse fácilmente, en cualquier proyección en que se represente al plano como una línea; y la proyección del plano en tamaño real podrá realizarse mirándolo en esa dirección.

La figura 4·16 nos da las proyecciones horizontal y vertical de un plano inclinado *ABC*, y se pide que se represente en su verdadero tamaño y forma. El primer paso será representar al plano como una línea, sirviendo las proyecciones *A* y *C*, las que se obtienen mostrando en su verdadera longitud las líneas *AD* y *AE*, que representan en puntos en esas proyecciones *A* y *C*. Es el mismo procedimiento que se empleó para construir las proyecciones *C* y *D* de la figura 4·12. Una proyección de tamaño verdadero del plano *ABC* se puede ya tener, observándolo con las líneas visuales de las flechas *B* o *D*, perpendiculares a las paralelas a esas proyecciones lineales del plano dado. Los puntos *A*, *B* y *C* pue-

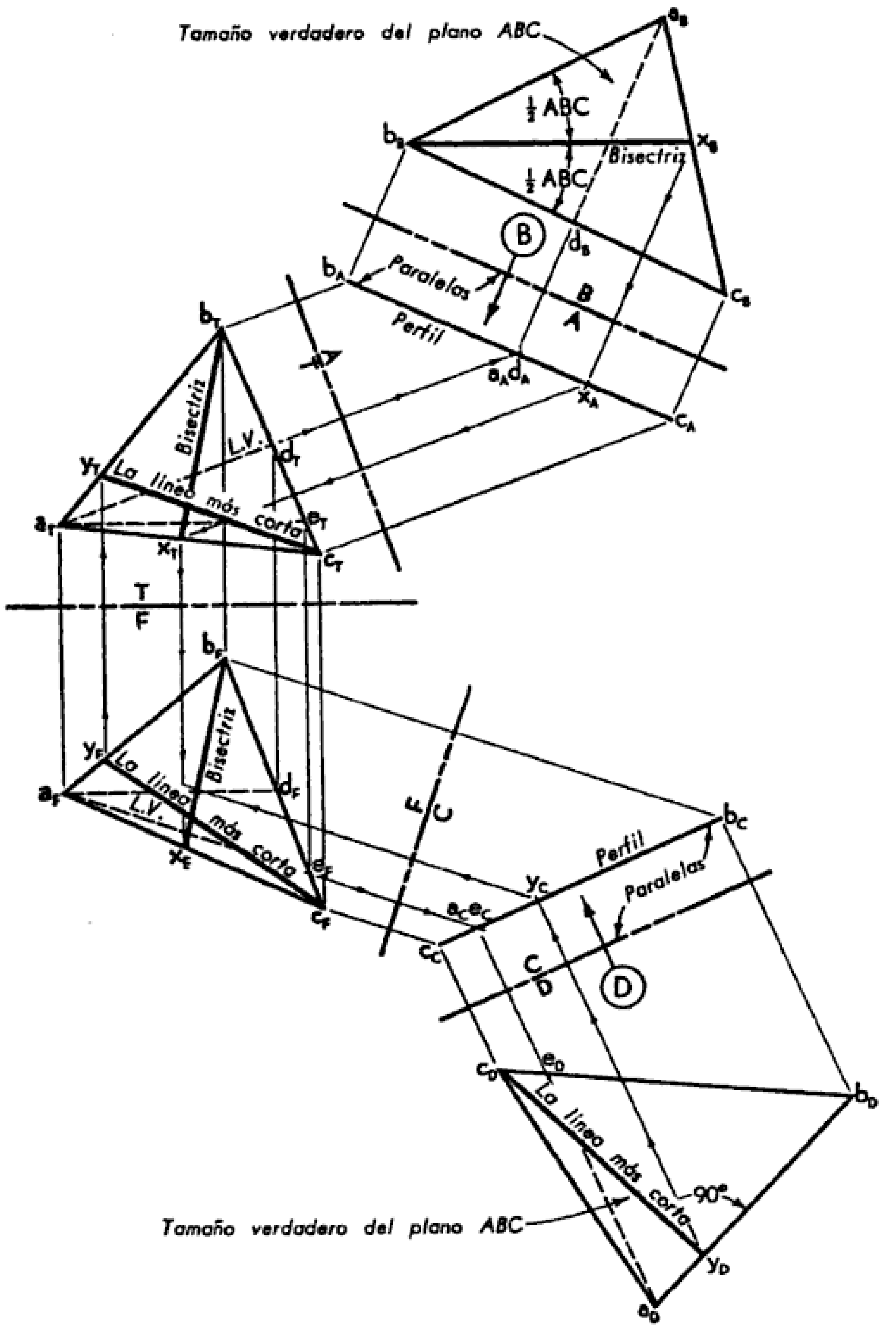


Fig. 4·16. Tamaño verdadero de un plano.

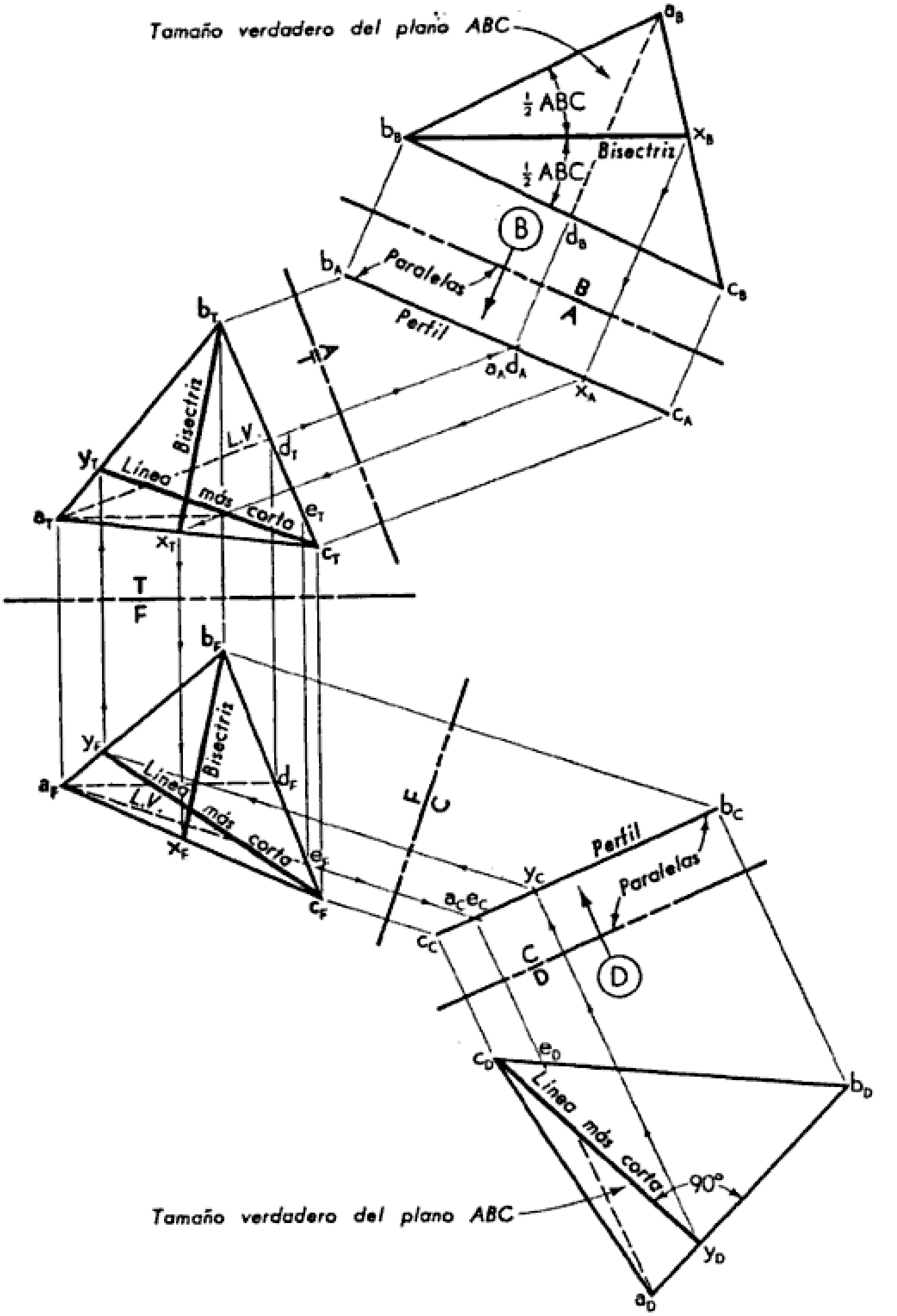


Fig. 4·16. (Repetida). Tamaño verdadero de un plano.

cuadrado.

Con estas condiciones y consideraciones racionales establecidas, y no antes, podemos empezar la construcción pedida.

Fase 1. Construir el plano en tamaño verdadero, en proyección de punto de vista elevado, indicando la posición de una línea horizontal, en todas esas proyecciones.

Se elige una línea horizontal *EF*, que no sea al azar, al distar de *B* 1 cm hacia abajo y en la que estará el centro buscado; partiendo de $e_F f_F$ se hallan las otras proyecciones hasta llegar a $e_B f_B$, y como $e_F f_F$ es horizontal y paralela a la línea de referencia *T-F* las proyecciones e_T f_T y $e_B f_B$ expresarán la verdadera longitud de *EF*, y además en todas ellas sabemos ha de estar el centro *O* del cuadrado. Por medio de *EF* se encontrará el plano *ABCD* en su superficie real. En la proyección elevada *A* la distancia, entre paralelas, e_A b_A será como la $o_A b_A$ de 1 cm; y como el centro del cuadrado tiene que estar en $e_B f_B$ y a una distancia de 1,375 cm se hallará ese centro o_B.

Fase 2. En la proyección de tamaño real del plano trazar el cuadrado, para trasladarle a las proyecciones iniciales.

Por o_B se traza una perpendicular a $e_B f_B$, y tomando a o_B como punto medio, sobre ella se mide 1,25 cm del lado del cuadrado, y con paralelas y perpendiculares a $e_B f_B$ quedará construido el cuadrado. Una vez hallados los cuatro vértices, *R*, *S*, *T* y *V*, bastará trasladarlos, por alineaciones y medidas, a las proyecciones horizontal y vertical, completando la solución.

Si inicialmente nos hubiesen dado las proyecciones horizontal y vertical del centro *O*, del cuadrado, no sería necesario encontrar la proyección *B*.

PROBLEMAS. Grupo 26.

4·16. Proyecciones de un círculo

El círculo es una figura plana, pudiéndose situar en un plano dado por el mismo método general que empleamos en el artículo anterior. Si el plano es oblicuo, el círculo aparecerá como una elipse en las proyecciones principales. Estas elipses pueden dibujarse partiendo de la proyección donde el círculo figure con su área real, tomando en él un cierto número de puntos, los que a continuación, por alineaciones y medidas, se llevan a las otras proyecciones hasta poder dibujar esas elipses. (Este método fue empleado en la fase 4 de la figura 3·26). Pero este método es largo e inseguro, siendo preferible otros métodos más sencillos y exactos.

En la figura 4·18(*a*) se representa un círculo de diámetro *D*, con su superficie real en la proyección vertical, teniendo *todos* sus diámetros la misma y verdadera longitud. En la proyección horizontal, según la regla 13, el círculo se proyecta de canto, según una recta paralela a la línea de referencia y con una longitud igual al diámetro. Si el círculo gira alrededor de su eje vertical la proyección (*a*) se transforma en la (*b*), en la que el círculo se ha convertido en una elipse, y la proyección horizontal sigue valiendo el diámetro *D*, sin ser ahora paralela a la línea *T-F*. El diámetro vertical sigue apareciendo como un punto en la proyección horizontal, y en la vertical es el *único diámetro* que se representa en su *longitud real* y es además el eje mayor de la elipse. El diámetro que aparece más corto es el perpendicular al *eje mayor*, que será el *eje menor*, el que figura en su longitud verdadera en la proyección horizontal, al ser paralelo a la línea de referencia en la proyección vertical.

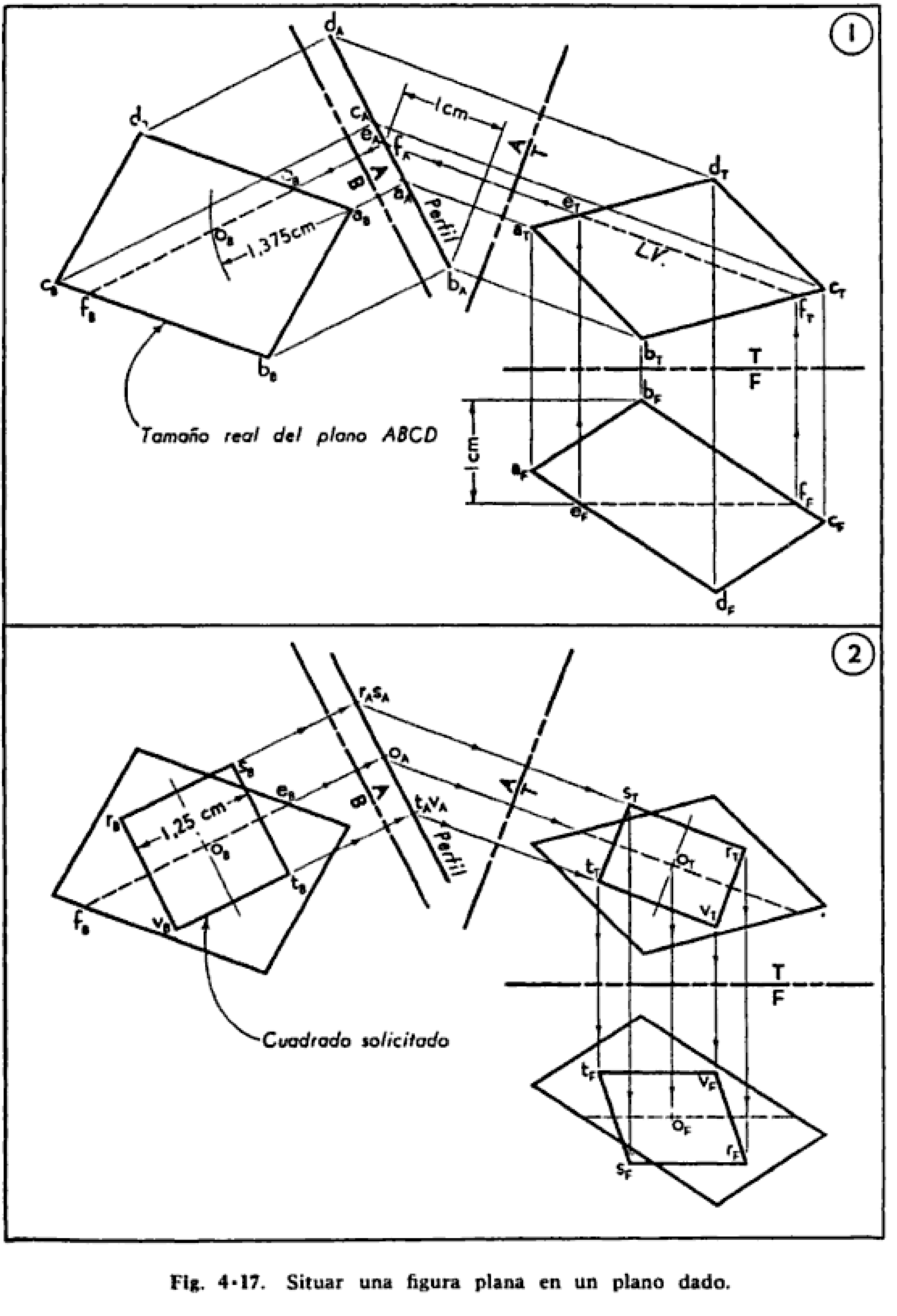


Fig. 4·17. Situar una figura plana en un plano dado.

Si el plano del circulo, que hasta ahora ha sido perpendicular al plano horizontal de proyección, deja de serlo inclinándose hacia atrás, para quedar oblicuo, entonces el círculo se proyecta como se observa en la figura 4·18 (*c*); es decir como una elipse en la proyección horizontal, no figurando la proyección vertical. En la proyección *A*, adyacente a la horizontal, el círculo se proyecta como el diámetro *D* de longitud real. Todos los diámetros, en la proyección horizontal, se muestran acortados menos el diámetro que representa al *eje mayor* de la elipse, que tiene que figurar en su tamaño exacto porque en la proyección *A* era un punto, figurando en esta proyección *A* el eje menor también en su longitud real.

De las observaciones anteriores se deduce la conclusión siguiente:

En toda proyección oblicua de un círculo hay un diámetro que siempre figura en longitud verdadera, y ese diámetro es siempre el eje mayor de la elipse. El eje menor de la elipse también aparecerá siempre en magnitud real, en una proyección adyacente en que figure el círculo de perfil.

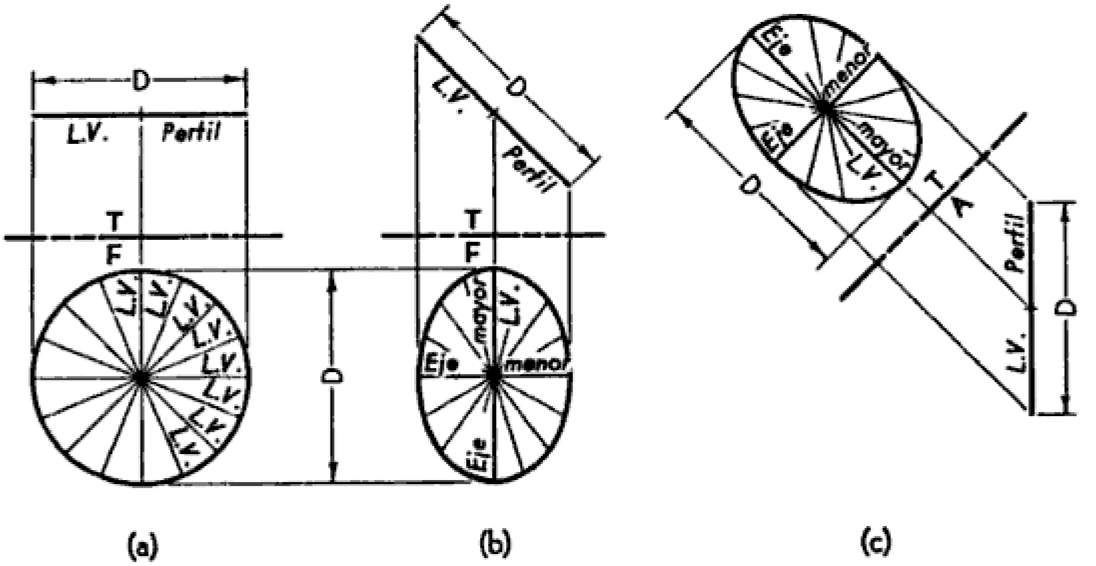


Fig. 4·18. Proyecciones de un círculo.

Siempre que se conozcan los ejes mayor y menor de una elipse se podrá construirla, según varios métodos (véase arts. A·7, A·9 y A·11, del Apéndice). El modo de determinar los ejes de una elipse, correspondientes a las proyecciones de un círculo oblicuo, lo estudiaremos en los dos próximos artículos.

4·17. Trazar un círculo en un plano dado (método de la proyección lineal)

PROBLEMA. Se pide representar un círculo de diámetro *D*, con centro en *O* en el plano *ABCD*, de la figura 4·19.

Fase 1. Situar el eje mayor de la elipse en la proyección horizontal

Por el punto *O* se traza la línea horizontal *EF*, y sobre la longitud verdadera $e_T f_T$ se toma la distancia *D*, centrada sobre o_T con lo que 1-2 será el eje mayor.

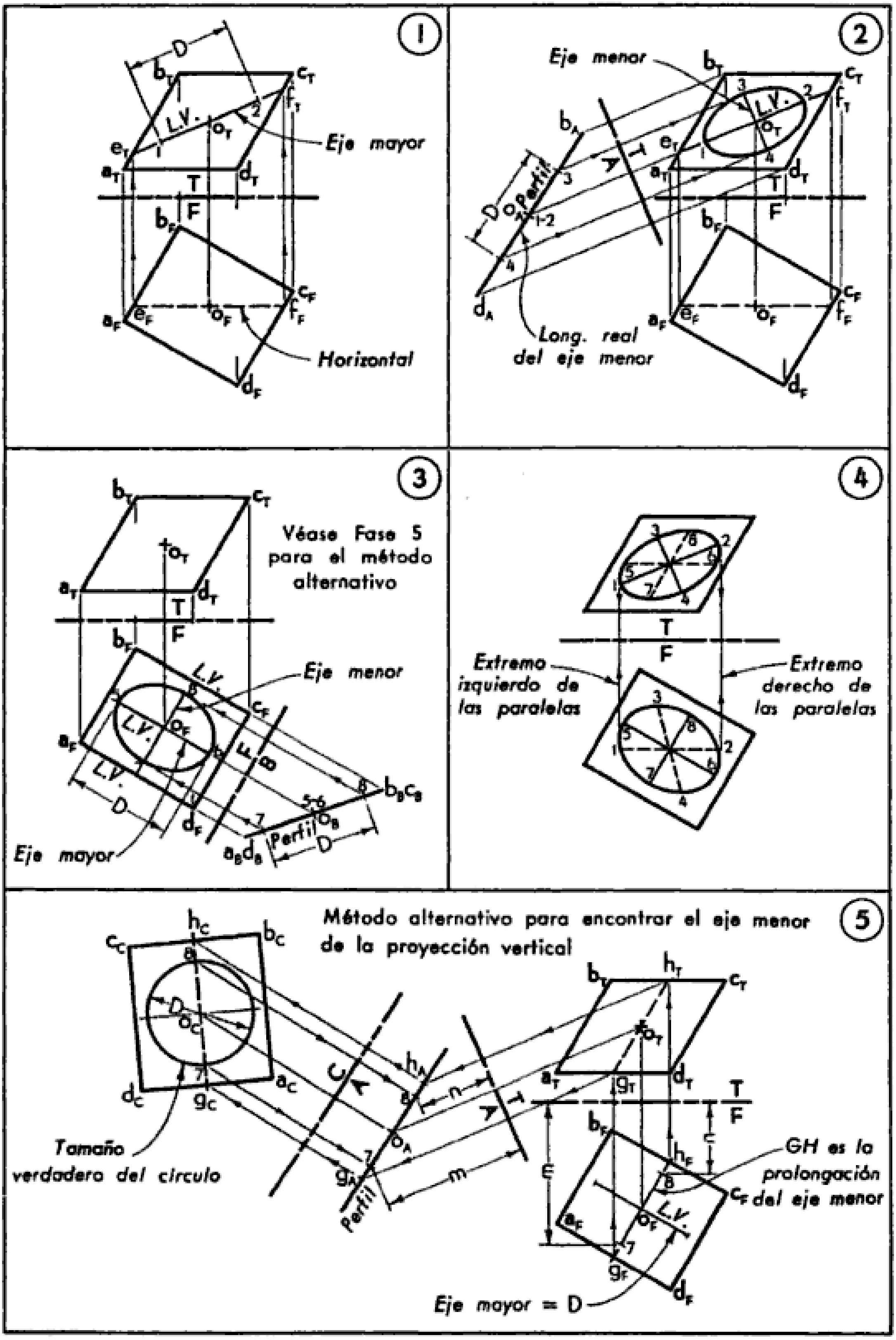


Fig. 4·19. Representar un círculo en un plano (método de proyección de perfil).

4·19. Trazar un plano que pasando por una línea sea paralelo a otra línea dada

ANÁLISIS. El plano solicitado está definido por dos lineas que se cortan: una de ellas es la linea dada, y la otra es la paralela que se trace a la otra linea también dada.

PROBLEMA. En la figura 4·21 se pide trazar un plano que pasando, o conteniendo, a la linea *CD* sea paralelo a la linea *AB*.

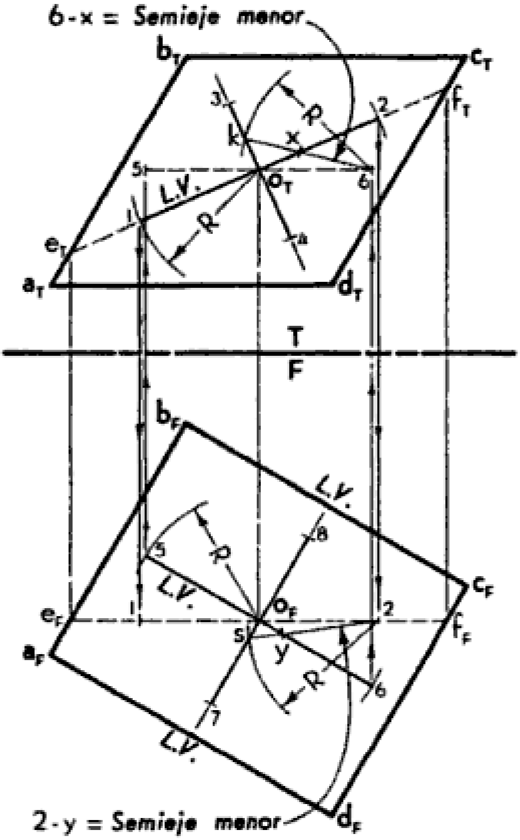


Fig. 4·20. Trazar un círculo por un punto de un plano (método de las dos proyecciones).

CONSTRUCCIÓN. Como la linea *CD* es una del plano pedido será suficiente trazar otra que, cortándola, sea paralela a *AB*. El punto de intersección puede tomarse en cualquier sitio de la linea *CD*. en la figura 4·21 se ha elegido el mismo punto *C*. Por el punto c_T se traza la linea c_Tx_T paralela a a_Tb_T ; y por c_F la c_Fx_F paralela a a_Fb_F. El plano formado *DCX* es el pedido, y cualquier otra linea se puede suponer situada en él, como la horizontal *XY*. Para comprobar la solución se puede construir una proyección de perfil del plano *DCX* y observar si la linea *AB* es paralela al plano.

Si las dos lineas dadas fueran paralelas, entonces la solución del problema es indeterminada, ya que *cualquier* plano que pase por una de las lineas es siempre paralelo a la otra linea.

PROBLEMAS. Grupo 28.

4·20. Trazar un plano que pasando por un punto sea paralelo a dos líneas dadas

Análisis. El plano solicitado puede ser definido por dos líneas que se cortan en el punto dado, siendo además paralela cada una de ellas a cada una de las dos dadas.

Problema. En la figura 4·22 es necesario construir un plano que pase por el punto *O* y sea paralelo a las líneas *AB* y *CD*.

Construcción. Por el punto *O* se traza la línea *RS*, que sea paralela a *AB*; y también la línea *TV* paralela a *CD*. El plano *RSTV*, que pasa por *O*, es el pedido. La solución se puede comprobar trazando una proyección de perfil del plano, en la que las líneas *AB* y *CD* deben aparecer paralelas a ese plano obtenido.

Si se tratase de situar un plano que pasando por un punto dado tuviera que ser paralelo a otro plano dado, se haría lo mismo que antes empleando dos líneas de ese plano que nos dan.

PROBLEMAS. Grupo 29.

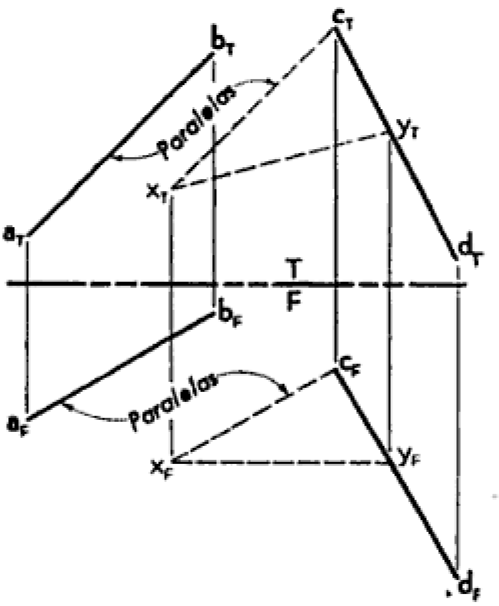


Fig. 4·21. Trazar un plano que, pasando por una línea, sea paralelo a otra línea.

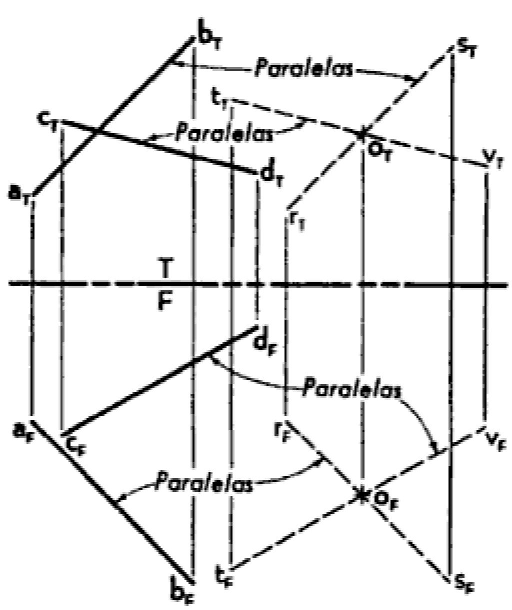


Fig. 4·22. Trazar un plano que pase por un punto y sea paralelo a dos líneas dadas.

4·21. Hallar la línea más corta entre dos líneas que se cruzan (método del plano)

Análisis. Se pasa un plano por una de las líneas que sea paralelo a la otra línea dada, entonces la distancia entre las dos líneas que se cruzan será la distancia perpendicular que hay entre una línea y un plano paralelo. Una proyección de perfil del plano mostrará a esa perpendicular en su longitud real, y la proyección que represente a ese plano en su tamaño verdadero proyectará la perpendicular en un punto, revelando su posición exacta. En resumen:

1. *Trazar un plano por una línea que sea paralelo a la segunda línea dada.*
2. *Proyectar el plano de perfil, y luego en su tamaño verdadero.*

Este problema fue resuelto en el articulo 3·17, por el método lineal.

Problema. En la figura 4·23 determinar la distancia separadora entre las líneas centrales de un cable y de un arriostramiento (lo mismo que en la figura 3·24).

Construcción. Por el punto A, de la línea AB, se traza la línea AE que sea paralela a la recta dada CD, para formar el plano ABE. En este plano se traza la horizontal RS, para que en la proyección A se proyecte como un punto y el plano como una línea. La linea CD se proyecta en A en c_Ad_A, paralela al plano; lo que es un excelente medio de verificar la exactitud de la construcción.

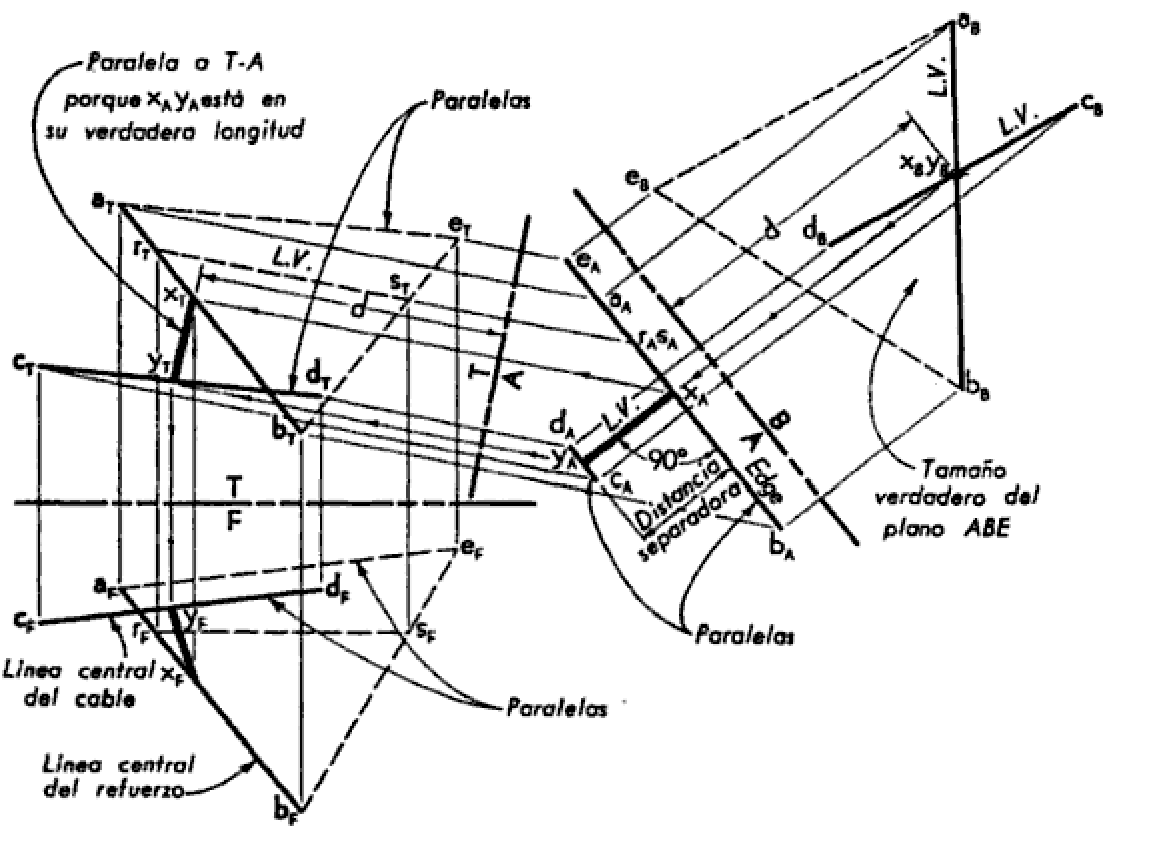


Fig. 4·23. Distancia más corta entre dos líneas que se cruzan (método del plano).

En la proyección A, la linea más corta solicitada es la perpendicular entre estas dos lineas a_Ab_A y c_Ad_A. En esta proyección A se muestra la *dirección y longitud verdadera* de la linea pedida, pero su exacta *situación* es aún desconocida. Con la proyección B se representa el plano ABE en su verdadero tamaño, CD también figura en su exacta longitud, y la distancia pedida XY proyectada en un punto, intersección de las lineas a_Bb_B y c_Bd_B. Por x_By_B se traza una alineación paralela hacia la proyección A, localizando la exacta situación de x_Ay_A, pudiendo asi situarse la linea XY en las proyecciones horizontal y vertical por alineaciones directas que pueden verificarse, con medidas a las lineas de referencia, tal como la distancia d.

Lo mismo podría haberse resuelto el problema hallando la proyección de perfil en una proyección adyacente a la proyección vertical, en vez de a la horizontal como se ha hecho, pero es mejor haberlo realizado así porque la proyección

A está hecha con una vista elevada, que muestra la linea *XY* en longitud verdadera y, además, si se solicitara el ángulo de pendiente de *XY* se podría medir directamente en la proyección *A*.

PROBLEMAS. Grupo 30.

4·22. Unir dos líneas que se cruzan por una línea de mínima pendiente o de pendiente determinada

Este problema es muy similar al que acabamos de describir en el articulo 21 excepto que la linea de unión solicitada *no* es perpendicular a las dos rectas que se cruzan al tener una pendiente determinada.

ANÁLISIS. Si por una de las lineas que se cruzan hacemos pasar un plano paralelo a la otra linea, establecerá *todas* las lineas minimas. Y si este plano aparece de perfil la linea más corta tiene que ser la que se represente en su *longitud verdadera*. Si esta proyección de perfil está hecha con *vista elevada*, la linea pedida puede trazarse con una *pendiente determinada*. Una proyección que represente a la linea de minima pendiente como un punto, se localiza como si fuera una intersección de las lineas dadas. Resumamos las *tres etapas* de la solución.

1. *Se traza un plano que pase por una linea y sea paralelo a la otra linea dada.*
2. *Representar al plano de perfil en una proyección elevada.*
3. *Trazar una linea con la pendiente solicitada en la proyección de perfil y luego construir una proyección adyacente en que se represente la linea solicitada como un punto.*

OBSERVACIÓN. El método de perfil del articulo 3·17 no puede ser empleado, ya que la proyección que muestra la linea solicitada en su longitud verdadera también representa una linea *inclinada* como un punto (a_Bb_B en la figura 3·24) y tal proyección no puede ser una vista elevada.

PROBLEMA. En la figura 4·24 las lineas *AB* y *CD* son las lineas centrales de dos túneles de una mina, que tienen que unirse por el túnel más corto posible, con una pendiente hacia arriba del 30 % desde el túnel *AB* ál *CD*.

CONSTRUCCIÓN. Por la linea *AB* se traza la recta *AE* paralela a *CD*, teniendo el plano *ABE*, el cual en una proyección adyacente de vista *elevada* tiene que aparecer como una linea; la linea horizontal *AF* se proyectará en un punto (a_A f_A), y la recta *CD* en la c_Ad_A paralela al plano proyectado en la linea $b_Aa_Ae_A$. Cualquier linea inclinada, con la pendiente que sea, aparecerá en su longitud verdadera en esta proyección, pero para determinar su situación exacta es preciso otra nueva proyección.

Para situar la linea más corta con una pendiente del 30 %, hay que establecer primeramente esta pendiente en la proyección *A*. Para ello, en un punto cualquiera de la proyección *A* se traza una paralela a la horizontal *T-A*, en ella se toman 100 unidades cualesquiera, en su extremo se traza una perpendicular y en ella se toman *30* de estas unidades, se une el punto obtenido con el punto inicial para formar el triángulo y así en la hipotenusa se tendrá la dirección pedida, que es la del túnel solicitado. En la proyección *B*, cuya linea de referencia *B-A* se ha trazado perpendicular a esa dirección inclinada al 30 %, la linea solicitada m_An_A tendrá que proyectarse en un punto m_Bn_B, en el que aparecerán cortarse la *T-A*, para el tramo horizontal pedido, que muestre *AF* en su longitud verdadera, sin las proyecciones *A* y *B*.

OBSERVACIÓN. La proyección reseñada *D* sólo sirve para encontrar la linea *horizontal* más corta, pero no es válida si la linea solicitada tiene ángulo de pendiente.

PROBLEMAS. Grupo 31.

4·23. Hallar la intersección de una línea y un plano (método de proyección lineal)

Si una linea recta no pertenece a un plano, ni es paralela a él, le cortará, perteneciendo el punto de intersección a la recta y al plano. Este problema es fundamental en muchos problemas de geometría descriptiva, que se puede equiparar en importancia a las cuatro proyecciones básicas, ya reseñadas.

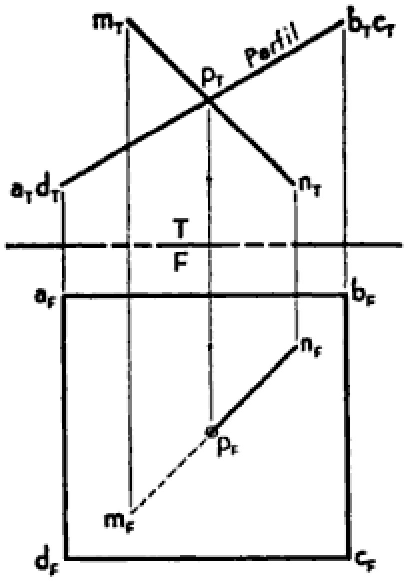


Fig. 4·25. Intersección de una línea con un plano vertical.

PLANO DE PERFIL. Este es el caso más sencillo, cuando el plano aparece de perfil en una de las proyecciones dadas. En la figura 4·25 se da el plano vertical *ABCD* y la linea oblicua *MN*. El punto p_T, de la proyección horizontal, es la intersección de los dos elementos citados, que trasladado a la proyección vertical dará la proyección p_F. Como el plano se suele considerar opaco, la parte $n_F p_F$ es visible y su traza es continua, mientras la parte $m_F p_F$ al estar oculta se dibuja a trazos.

PLANO OBLICUO. Si el plano es oblicuo se traza una proyección adyacente en la que el plano aparezca de perfil, y ya estamos en el caso anterior. En la figura 4·26. tenemos el plano oblicuo *ABCD* y la linea *MN*. Al ser los lados $a_T b_T$ y $d_T c_T$ paralelos a la linea de referencia *T-F* los lados $a_F b_F$ y $c_F d_F$ expresarán la longitud verdadera de los lados *AB* y *CD*, luego con la proyección adyacente *A* a la proyección vertical tendremos la proyección de perfil del plano *ABCD*, en $a_A b_A$ $c_A d_A$. Y encontrado el punto p_A se traslada a las proyecciones en p_F y p_T.

VISIBILIDAD. La visibilidad correcta de la linea $m_F n_F$ se puede determinar ahora o a partir de la proyección horizontal o desde la proyección adyacente *A*.

Un plano está de perfil. La figura 4·27 nos muestra el caso en que uno de los planos figura de perfil, en una de las proyecciones dadas. El perfil del plano *ABCD* corta al plano oblicuo *RST* en los puntos *P* y *Q*, los que al pertenecer a los dos planos serán los dos puntos solicitados de la intersección común, $p_T\,q_T$ - $p_F\,q_F$. Si los planos están definidos como muestra la figura, la intersección será la línea *PQ*; y si los planos se consideran ilimitados, *PQ* se consideraría indefinida. La línea *RT* se encuentra debajo del plano *ABCD*, estando oculta el área *RPQT* de la proyección horizontal

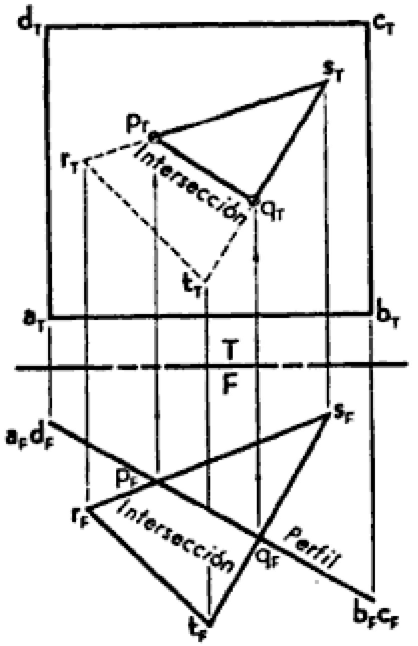


Fig. 4·27. Intersección de un plano oblicuo con otro de perfil.

Los dos planos son oblicuos. Si los dos planos fueran oblicuos, como se observa en la figura 4·28, se abrevia la solución construyendo una proyección en la que uno de los planos se proyecte como una línea, tomando una proyección adyacente a la proyección horizontal o a la vertical. En la proyección *A*, de la figura 4·28, el plano *ABC* se proyecta como una línea, la que corta al plano *RST* en los puntos p_A y q_A, de los que deducimos los p_T - q_T y p_F - q_F, que determinan la intersección buscada. No afectando a la dirección de la línea de intersección el que el punto *p* se encuentre fuera de los límites del plano *ABC*. Pero si este plano *ABC* es limitado, se determina la intersección *PQ* por la línea *AB*.

Visibilidad. La visibilidad se puede determinar en cada proyección examinando los numerosos puntos donde una línea de un plano se cruza con otra línea del otro plano. (Regla *d*, art. 2·9). Cuando la visibilidad correcta ha sido determinada en un punto cualquiera de cruce de una proyección, la visibilidad del resto en los demás puntos de cruce, de la misma proyección, se encuentra fácilmente. La línea *ST*, por ejemplo, se encuentra debajo de la *BC*, al fijarse en la alineación de los puntos 1 y 2, ya que el 1 de la *BC* está más cerca de la línea de referencia, luego *BC* está encima. Pero a partir de la intersección *PQ*, el plano *ABC* pasa debajo de *RST*, es decir, la línea *RS* pasa por encima de *AB* y *AC*. De ese modo seguiríamos con las demás líneas de los planos superpuestos.

Hay métodos más cortos para encontrar la intersección de dos planos oblicuos, como se explica en el artículo 4·26, pero el de proyección de perfil descrito es sencillo y claro, y especialmente útil para cuando un plano se corta con otros varios (véase fig. 4·35). Es muy aconsejable, el método reseñado, cuando uno o los dos planos se designan por su dirección y pendiente, pues el ángulo de pendiente sólo se puede construir en una proyección de vista elevada.

Problemas. Grupo 33.

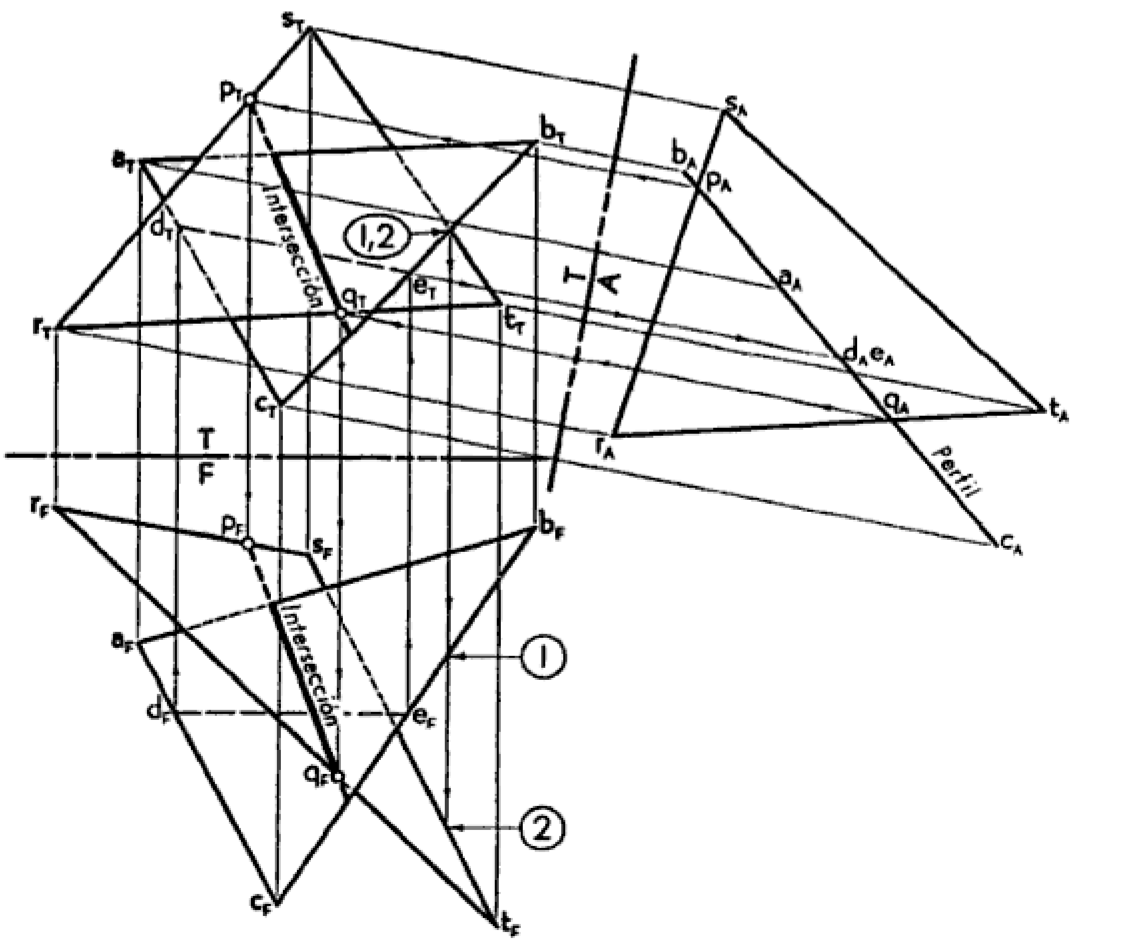


Fig. 4·28. Intersección de dos planos oblicuos (método de la proyección de perfil).

4·25. Intersección de una línea y un plano (método del plano cortante)

Ya en el artículo 4·23 se encontró la intersección de una línea y de un plano oblicuo, por el método de proyección de perfil, aunque es muy corriente tiene el inconveniente de necesitar una proyección más. Ahora veremos que también puede ser resuelto solamente con las dos proyecciones dadas, por el *método del plano cortante* (excepto en el caso en que la línea esté de perfil).

Plano cortante vertical. La figura 4·29 representa las proyecciones horizontal y vertical del plano oblicuo *ABC* y de la línea oblicua *MN*. A la derecha de la misma figura está la representación gráfica de la misma linea y del plano. En esta vista gráfica aparece un *segundo plano, plano cortante vertical* en el que está situado la linea *MN* y que corta al plano dado según la linea *RS*. Estas dos lineas *MN* y *RS* se cortan en el punto *P*, que es el punto pedido de intersección de linea y plano.

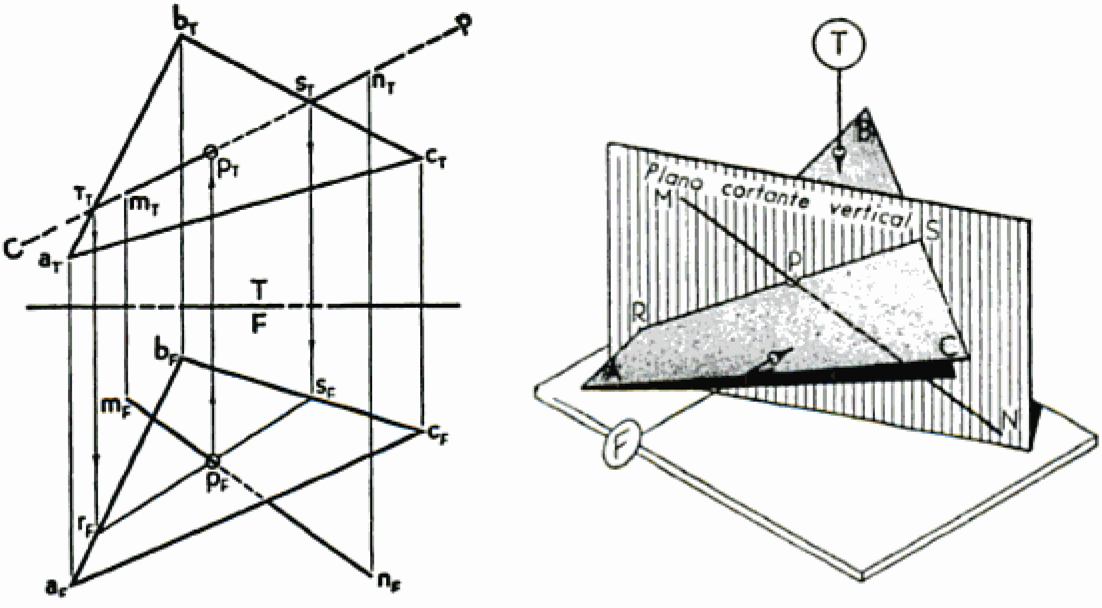


Fig. 4·29. Intersección de una línea con un plano oblicuo (método del plano vertical cortante).

Apliquemos el mismo método a las proyecciones de la figura 4·29, trazando un plano vertical que contenga a la linea *MN*, el cual en la proyección horizontal figura como una linea que coincide con la $m_T n_T$, y que se designa por *C-P*. Este plano es indefinido, lo que se indica por los tres trazos cortos de las extremidades. Al estar completamente descrita la posición de este plano de corte, en la proyección horizontal, no es necesario su representación en la proyección vertical (como se explicó en el art. 4·6 y fig. 4·11).

Ahora habrá que determinar la linea de intersección del plano cortante y del plano *ABC*. Ese plano vertical corta a la linea *AB* en el punto *R*, y a la *BC* en el punto *S*, luego la linea $r_F s_F$ será la proyección vertical de esta linea de intersección. (Comparar esta construcción con la fig. 4·27). Las lineas *MN* y *RS* coinciden en la proyección horizontal, pero en la proyección vertical se cortan en el punto p_F, que es la intersección pedida de la linea *MN* y del plano *ABC*, y por alineación sobre $m_T n_T$ se encuentra p_T.

Plano cortante perpendicular al plano vertical.

En la figura 4·30 el plano cortante, que pase por la linea, es perpendicular al plano vertical, luego en la proyección vertical figurará como una linea. En el dibujo gráfico este plano cortante, al pasar por *MN*, forma el mismo ángulo de pendiente que esta linea, siendo la linea *TV* la intersección de ambos planos y el punto *P* la intersección solicitada entre línea y plano. En la proyección vertical, el plano de corte *C-P*, aparece como una línea coincidiendo con $m_F n_F$, y la intersección *TV* se localiza en cada proyección (compárese con la figura 4·27), y el punto de intersección solicitado queda también determinado en p_T-p_F.

Si en las figuras 4·29 ó 4·30, las líneas de intersección *RS* o *TV* hubieran aparecido paralelas a la línea *MN*, no habría el punto *P* de intersección, ya que entonces esa línea *MN* sería paralela al plano *ABC*.

En el caso que la línea dada estuviera de perfil, el método de plano cortante no proporcionaría ninguna solución, al figurar el plano cortante como otra línea, en ambas proyecciones. Se precisaría entonces otra proyección, además de las dos dadas, tal como la lateral; o bien emplear el método de proyección de perfil.

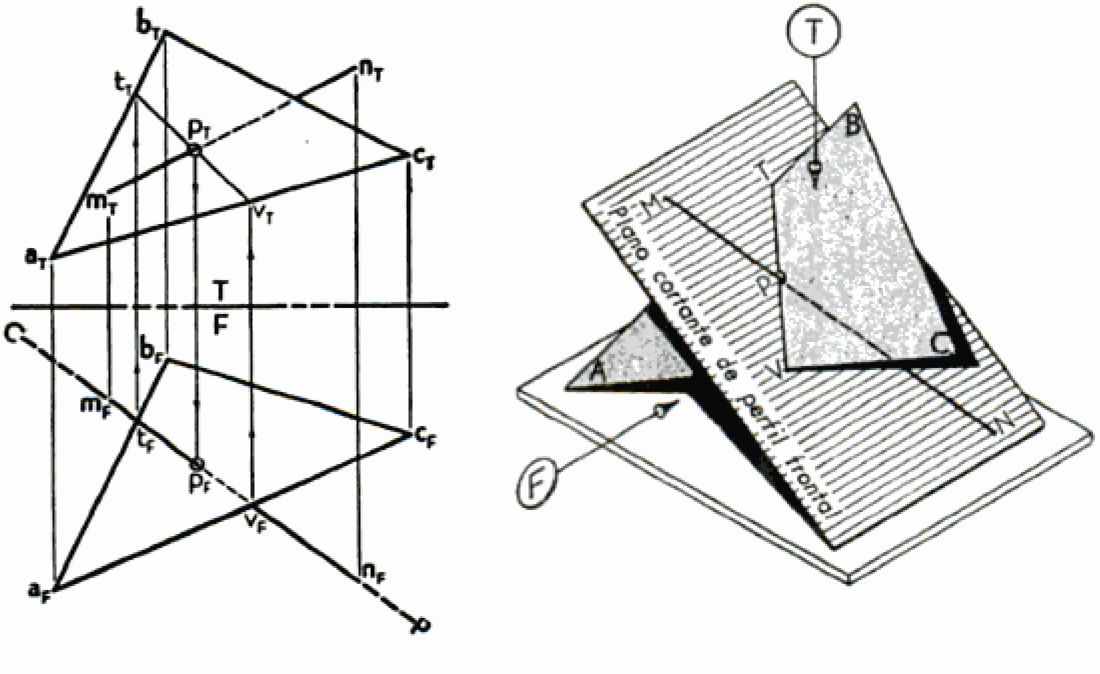


Fig. 4·30. Intersección de una línea con un plano oblicuo (método del plano cortante perpendicular al plano vertical).

Resumen. Por la importancia de este método y por el frecuente empleo del plano cortante, resumiremos lo tratado en la siguiente regla.

Regla 14. Regla de una línea que corta a un plano. *La intersección de una línea y un plano debe estar situada sobre la línea de intersección del plano dado y un plano cortante que contenga a la línea dada.*

Problemas. Grupo 34.

4·26. Intersección de dos planos (método de la línea individual)

Análisis. Si escogemos en un plano una línea cualquiera, podemos buscar su intersección con el otro plano, por ejemplo con el método del plano de corte del artículo 4·25; con esto tendremos un punto de la línea de intersección busintersección. El punto donde la linea *AB* corta al plano *RST*, se halla empleando el plano cortante vertical *C-P-2*. Prolongando los lados *RT* y *ST*, en cada proyección, se encuentra la intersección *GH*, cuya proyección vertical $g_F h_F$ encuentra a $a_F b_F$ en el punto p_F, del que se deduce p_T, teniendo ya el segundo punto *P* de la intersección buscada entre los dos planos dados

Con los dos puntos obtenidos podríamos trazar la intersección pedida, pero en este caso los puntos están demasiado juntos para que la linea quede determinada con exacta seguridad, por eso es conveniente el determinar un tercer punto. Con este propósito por la linea *ST* se ha trazado el plano *C-P-3*, el que produce la intersección *JK*, y su proyección $j_T k_T$ que es paralela a $s_T t_T$, lo que significa que *ST* es paralela al plano *ABC* y a la intersección de este plano con el *RST*. Luego trazaremos por los puntos *O* y *P* una paralela a *ST*, que marca la dirección de la interseccción. Como comprobación se ha encontrado un cuarto punto, con el plano cortante *C-P-4* que pasa por la linea *RT*, encontrando el punto *Q*. Después que la intersección ha sido encontrada se puede estudiar, como ya se ha visto anteriormente, la visibilidad de los distintos contornos, y en las dos proyecciones.

Con este método de lineas individuales hay que significar que la elección de lineas no está restringida a las que definen los planos. Si las lineas dadas produjeran puntos que estuvieran fuera del papel, el dibujante puede suponer otras lineas que proporcionen intersecciones más convenientes, o bien emplear el *método del plano auxiliar cortante* que se describe en el próximo articulo.

4·27. Intersección de dos planos (método del plano auxiliar cortante)

Análisis. Si cualquier tercer plano cortara a los dos planos dados, entonces los tres planos tienen que tener común un punto, *P*, excepto si este tercer plano fuera paralelo a la intersección de los otros dos. Si el tercer plano apareciera como una linea en una de las proyecciones dadas, no se necesitarian otras proyecciones auxiliares para encontrar la solución.

El diseño gráfico de la figura 4·32 nos aclara este análisis. Los planos dados están definidos; uno, por dos lineas paralelas *AB* y *CD*, y el otro por el triángulo *RST*, los cuales se extienden más allá de lineas definidas. El plano cortante perpendicular al plano vertical, corta al plano *RST* según la linea *RK*, y al plano *ABCD* según la linea *EF*.

Estas intersecciones al prolongarse se encuentran en el punto *P*, que será un punto de la intersección solicitada de los dos planos.

Construcción. En la figura 4·32, el plano cortante perpendicular al plano vertical *C-P-1*, se trazó por el punto r_F, y es horizontal. No es necesario que pase por un punto determinado ni que sea horizontal, pero es preferible que así sea con el fin de lograr mayor exactitud, al cortar a los planos dados en las partes más anchas. Este plano cortante al hacerlo con los planos dados lo efectúa según las lineas *RK* y *EF*, las que en sus proyecciones horizontales se cortan en el punto p_T del que se obtienen p_F, siendo este punto *P* uno de la intersección pedida.

Para tener el segundo punto, trazamos el plano vertical *C-P-2* que corta a los planos dados según las rectas *MN* y *GH*, que en sus proyecciones verticales se encuentran en q_F del que se deduce q_T. Luego si unimos los dos puntos obtenidos, *P* y *Q*, se tendrá la intersección buscada *PQ*, con sus dos proyecciones, e indefinida al ser ilimitados los planos reseñados.

Aunque para determinar la intersección son suficientes dos puntos, se suelen

4·28. Poliedros

Cualquier cuerpo que está limitado, completamente, por superficies planas podemos considerarlo como un poliedro. Estas superficies planas se llaman *caras*, y sus intersecciones *aristas*. Existen cinco poliedros *regulares*, que se les llamaba «Los cinco cuerpos de Platón», de interés general y permanente, siendo convexos y con caras iguales que son polígonos regulares. En la figura 4·33, están dibujados los cinco poliedros regulares, de nombres derivados relativos al número de caras que tengan: el *tetraedro*, con cuatro caras de triángulos equiláteros: el *cubo* o *hexaedro*, con seis cuadrados por caras: el *octaedro*, con ocho triángulos equiláteros; el *dodecaedro*, que tiene doce caras pentagonales; y el *icosaedro*, con veinte caras triangulares equiláteras.

Con excepción del cubo, los demás poliedros regulares suelen tener muy poco valor práctico en los asuntos de ingeniería. Sin embargo son muy importantes en la rama de mineralogía llamada cristalografía. La mayor parte de los minerales tienen una estructura cristalina, soliendo tener estos cristales las formas poliédricas regulares. Los diversos minerales se pueden así clasificar, según la simetría de los cristales, con relación a un centro, a los ejes o a planos de simetría. Los ángulos diedros de las caras de los cristales son los que tienen que ser regulares, no en cambio la forma y tamaño de esas caras. El estudiante aficionado debe estudiar este tema interesante en los textos apropiados de cristalografía.

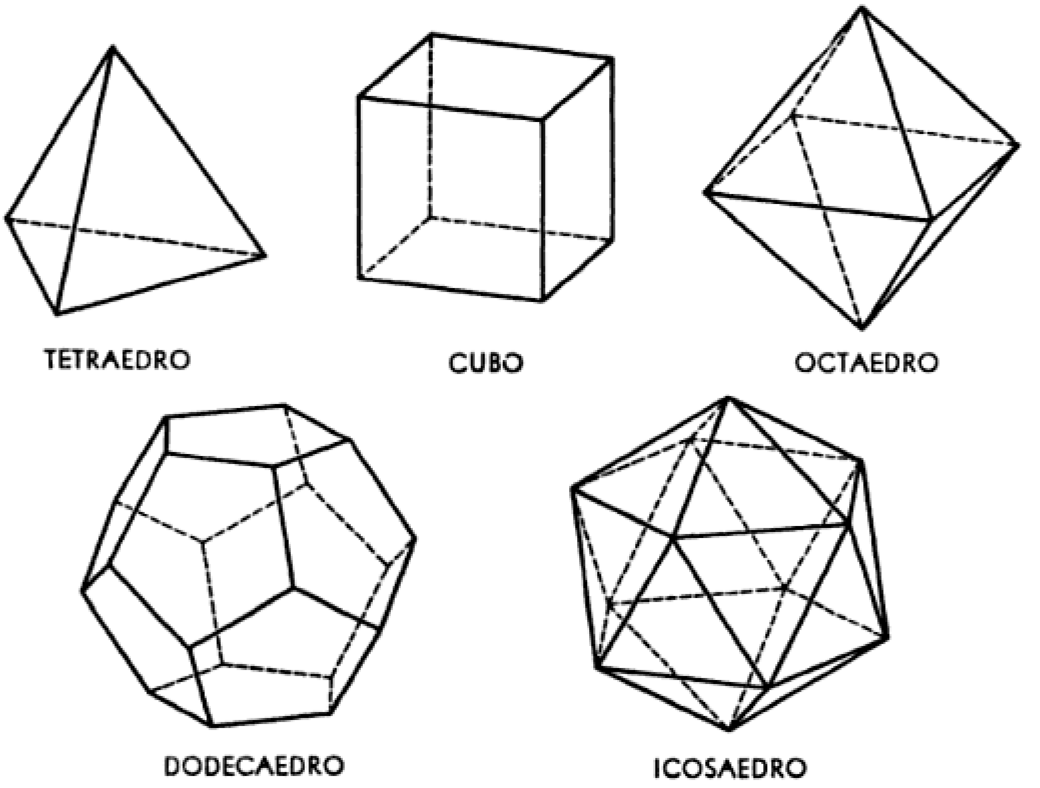


Fig. 4·33. Poliedros regulares.

Recordemos que el *prisma* es un poliedro irregular, con dos polígonos iguales y paralelos que se llaman *bases*, que se unen por paralelogramos laterales. Estas bases pueden tener cualquier forma poligonal, y de ahí los nombres de los prismas, que se ven en la figura 4-34. Si las caras y aristas laterales son perpendiculares a las bases, es decir, de caras rectangulares, el prisma se llama *recto*, y si esto no sucede es *oblicuo*. Se llama *altura* de un prisma la distancia perpendicular que separa los planos de sus bases. Si éstas son paralelogramos el prisma se llama paralelepípedo. Si el prisma es recto y las bases son regulares el prisma es *regular*. Y un *tronco de prisma*, o *prisma truncado* es la parte de prisma comprendida entre una de sus bases y un plano que cortando al prisma no sea paralelo a las bases.

Una pirámide es un poliedro irregular que tiene por base un polígono cualquiera, y las caras triangulares laterales se unen en un punto que se llama *cúspide* o *vértice* de la pirámide (véase la fig. 4-34). *Eje* de una pirámide es la recta que une su vértice con el centro de la base. Cuando este eje es perpendicular a la base, se llama *altura*, y expresa la distancia desde el vértice a la base, cuando esta perpendicular cae en el centro de esa base, y entonces la pirámide se llama *rectangular*, en otro caso es *oblicua*. *Tronco de pirámide*, o *pirámide truncada* es la porción de pirámide comprendida entre la base y un plano que corte a todas las caras laterales.

La representación de un prisma o pirámide en las proyecciones principales, cuando el eje del objeto está inclinado, ya se trató en el artículo 3-19.

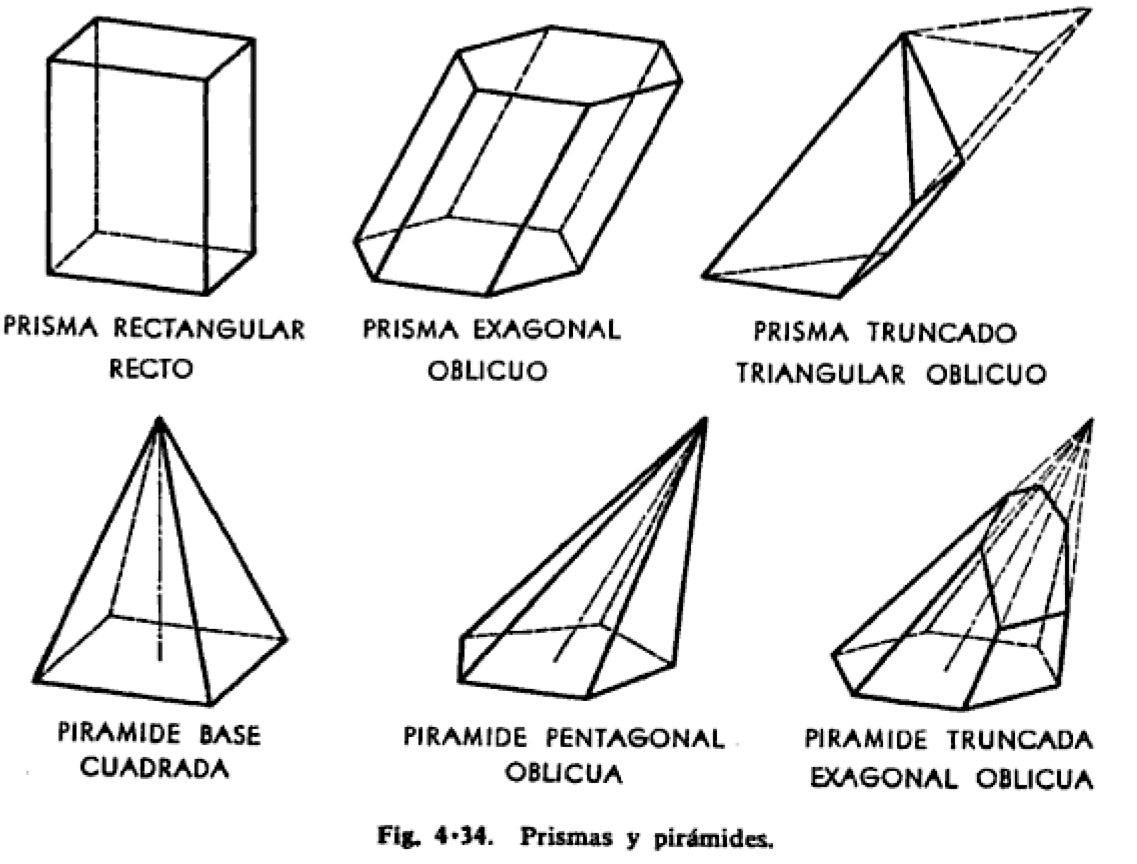


Fig. 4-34. Prismas y pirámides.

4·29. Intersección de un plano con un poliedro (método de proyección de perfil)

Si un plano corta a un poliedro, al cortar a sus caras laterales, lo hará según líneas rectas que forman una figura plana poligonal, llamada *sección plana,* que en el caso de que sea perpendicular al eje del poliedro se llama *sección recta.*

ANÁLISIS. Se emplea una proyección que represente al plano cortante de perfil, para así mostrar los puntos de encuentro con las aristas del poliedro, que indican los vértices solicitados de la sección plana.

PROBLEMA. La figura 4·35, nos muestra un paralelepípedo oblicuo en posición inclinada. Se pide hallar su intersección con el plano *ABCD*.

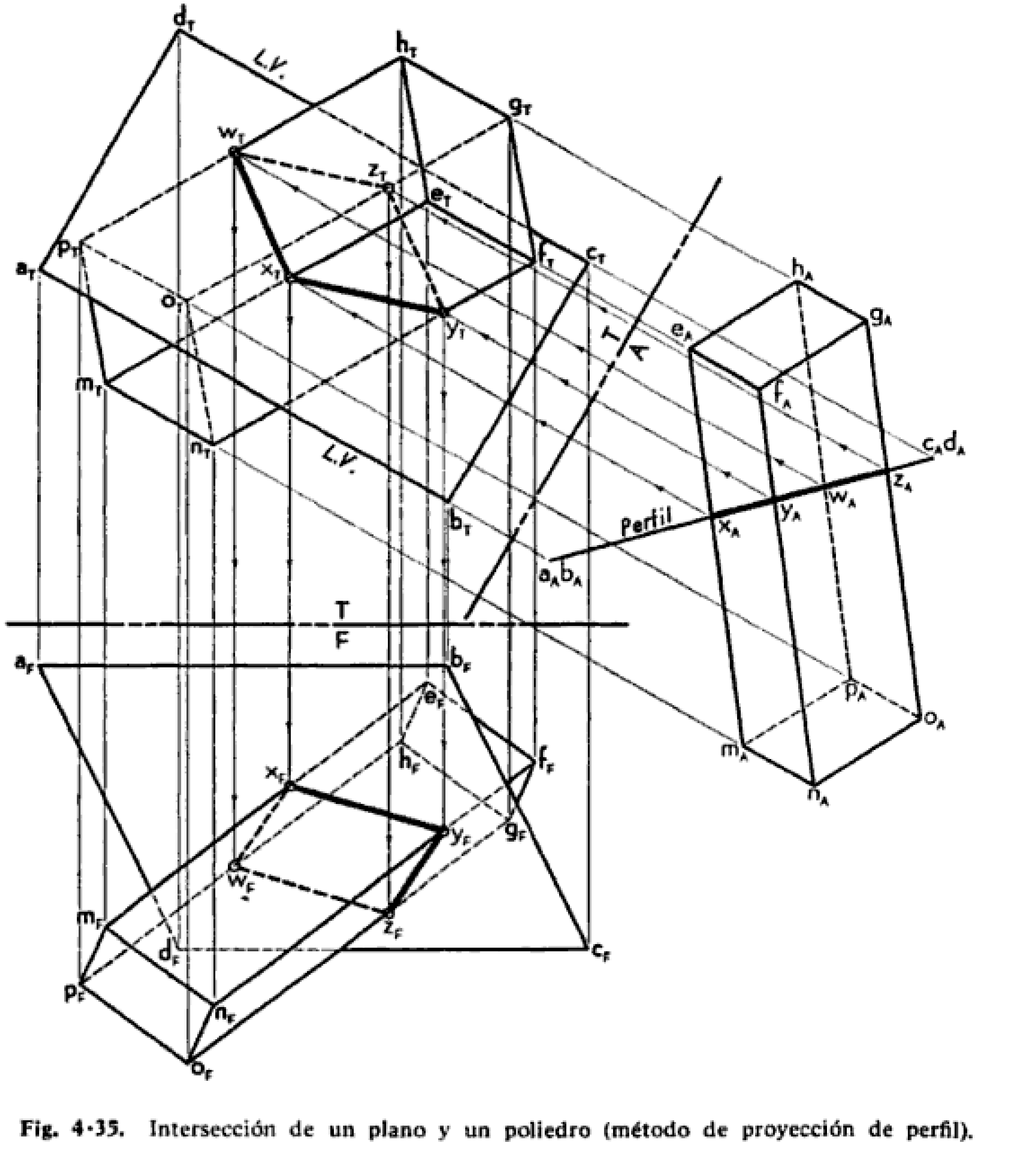


Fig. 4·35. Intersección de un plano y un poliedro (método de proyección de perfil).

Construcción. Para tener la proyección de perfil se puede emplear una proyección adyacente a la horizontal o a la proyección vertical, pero en la figura 4·35 al estar los lados *AB* y *CD* en su longitud verdadera en la proyección horizontal, se ha empleado la proyección elevada *A*. En esta, el plano *ABCD* corta a las caras laterales, pero no a las bases, lo que se observa más difícilmente en estas proyecciones de perfil. También corta este plano *ABCD*, a las aristas laterales en los puntos *X*, *Y*, *W*, y *Z*, siendo $x_A y_A w_A z_A$ la proyección de perfil de la sección plana solicitada, cuyos vértices son los puntos indicados. Trazando las paralelas desde estos vértices, se obtendrán sus proyecciones horizontales y verticales, debiendo además comprobarse las proyecciones verticales x_F, y_F, w_F, z_F, tomando las mediciones en la proyección *A* y desde estos puntos de intersección a la línea de referencia *T-A*.

La visibilidad de esta sección plana será función de la que tenga el prisma: así los puntos x_F, y_F, z_F, serán vértices visibles al estar en aristas que también lo son, luego los lados de la sección $x_F y_F$, $y_F z_F$, serán visibles. La visibilidad de las aristas del prisma se determinará por las reglas que vimos en el artículo 2·9.

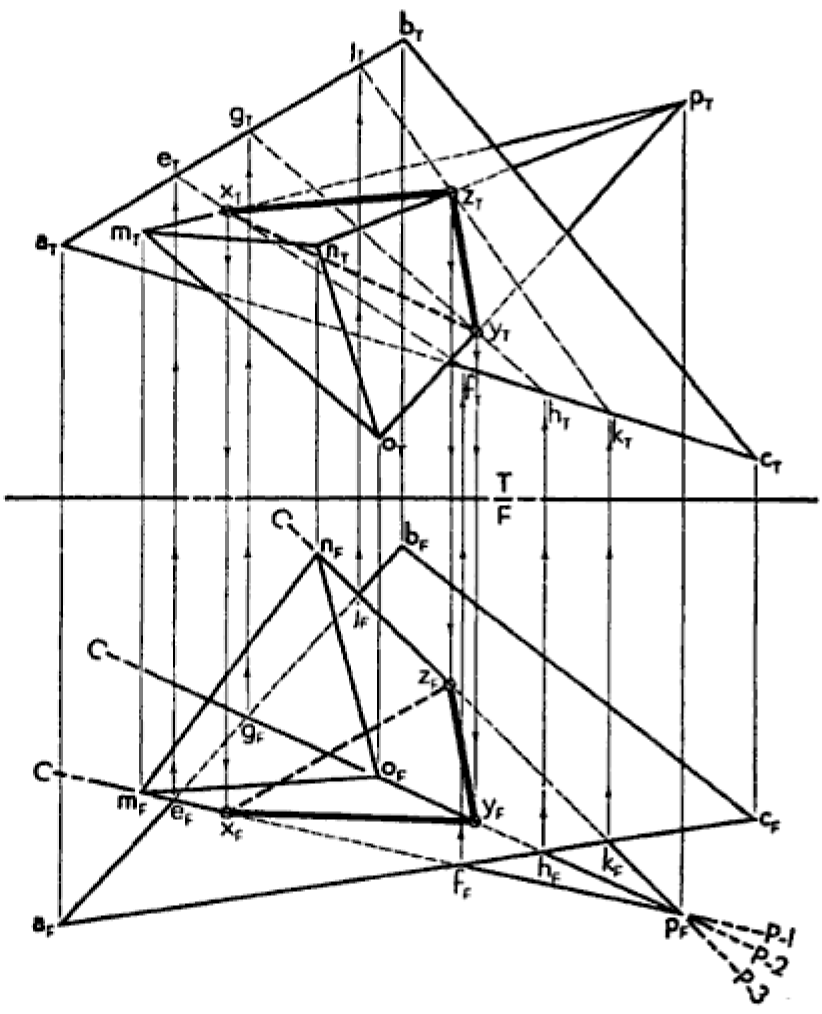


Fig. 4·36. Intersección de un plano y un poliedro (método de planos cortantes).

El punto x_T, de encuentro de $e_T f_T$ y de $m_T p_T$, se ha obtenido directamente, pero otras veces hay que prolongar las líneas citadas.

Si el punto X se encontrara en la prolongación de MP, entonces la intersección XY cortaría a la línea MO, y la línea XZ cortaría a MN, es decir, que el plano dado cortaría a la base de la pirámide. Entonces X ya no sería un vértice de la sección del plano, pero sí sería un medio de comprobación, de la sección en que se encontrase.

PROBLEMAS. Grupo 36.

4·31. Encontrar la intersección de una línea con un poliedro

ANÁLISIS. Si la línea pasa a través de un poliedro convexo, cortará a su superficie en dos puntos. Supongamos un plano que pase por esta línea, originando en el poliedro un corte de sección plana, entonces en esta sección se encontrarán los dos puntos buscados de la intersección. Aunque se pueden emplear los planos oblicuos, que pasan por esa recta, es más sencillo elegir uno perpendicular al plano vertical para que su proyección en él sea una línea recta.

PROBLEMA. En la figura 4·37 se representa un prisma oblicuo y la línea MN, solicitándose los puntos de intersección de esa línea con el prisma.

CONSTRUCCIÓN. Se supone que C-P es la traza del plano elegido, en el plano

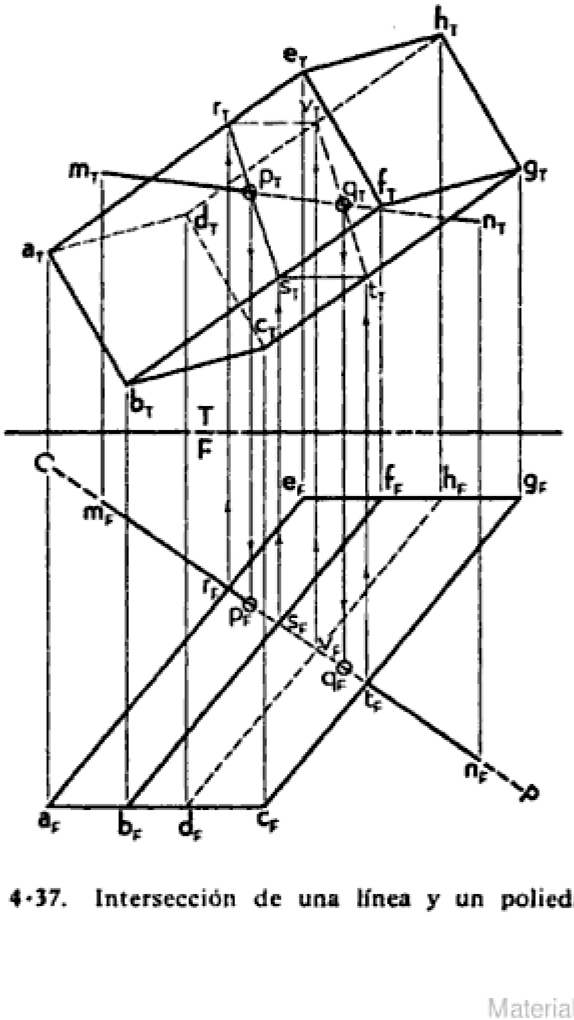


Fig. 4·37. Intersección de una línea y un poliedro.

4·33. Por un punto dado trazar un plano perpendicular a una recta

ANÁLISIS. El plano solicitado puede ser definido por dos lineas que pasen por el punto dado, las que tendrán que ser perpendiculares a la línea dada.

Problema. En la figura 4·39 se da la linea *AB* y el punto *X*, solicitándose trazar el plano perpendicular desde el punto a la linea.

CONSTRUCCIÓN. Por x_T se traza la perpendicular x_Tt_T a a_Tb_T, luego según hemos visto antes se deduce que la proyección vertical de esa linea *AB*, x_Ft_F tendrá que ser paralela a *T-F*, al estar x_Tt_T en su longitud real. Y si por x_F se traza la perpendicular x_Fr_F a a_Fb_F estará en su verdadera magnitud, luego r_Ts_T será paralela a *T-F*. Y con estas dos lineas que se cortan, perpendiculares a *AB* se determina el plano perpendicular solicitado.

PROBLEMAS. Grupo 39.

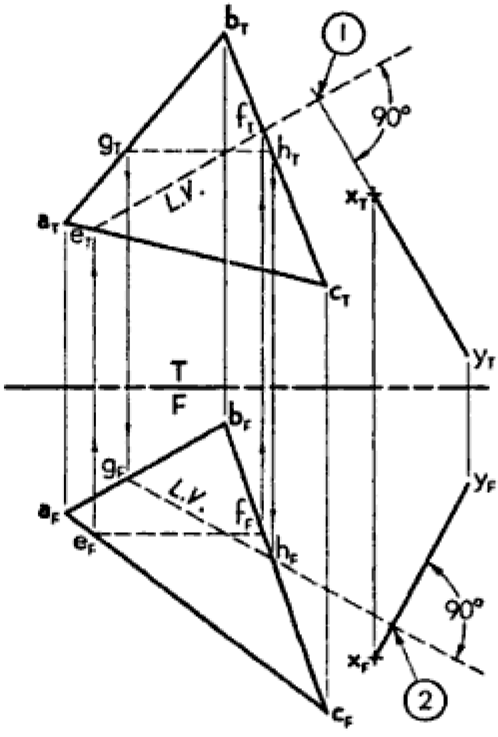


Fig. 4·38. Línea perpendicular a un plano.

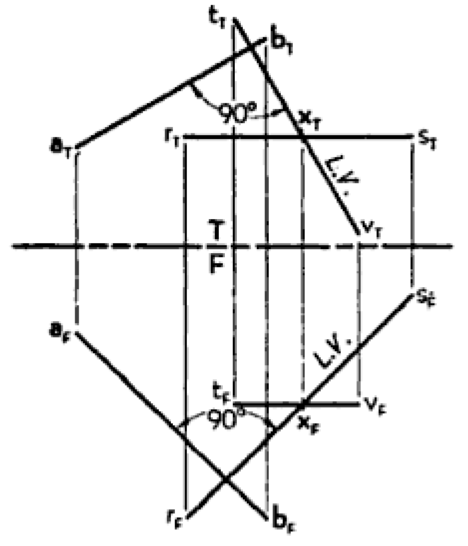


Fig. 4·39. Plano perpendicular a una línea.

4·34. Trazar un plano que pasando por una línea dada se perpendicular a otro dado

ANÁLISIS. Si por la linea dada se traza otra, que la corte, y que sea perpendicular al plano dado, será el plano buscado, pues pasando por la linea es perpendicular al plano dado.

PROBLEMA. En la figura 4·40 se conoce la linea de perfil *XY* y el plano *ABC*.

CONSTRUCCIÓN. Por el punto X se traza la perpendicular XZ al plano ABC, empleando la misma construcción de la figura 4·38, y el plano XYZ es el pedido.

PROBLEMAS. Grupo 40.

4·35. Trazar un plano que pasando por un punto dado sea perpendicular a dos planos dados

ANÁLISIS. Se puede construir, como hicimos en la figura 4·38, trazando por el punto dado dos líneas perpendiculares a cada uno de los planos dados, las que definirán el plano solicitado.

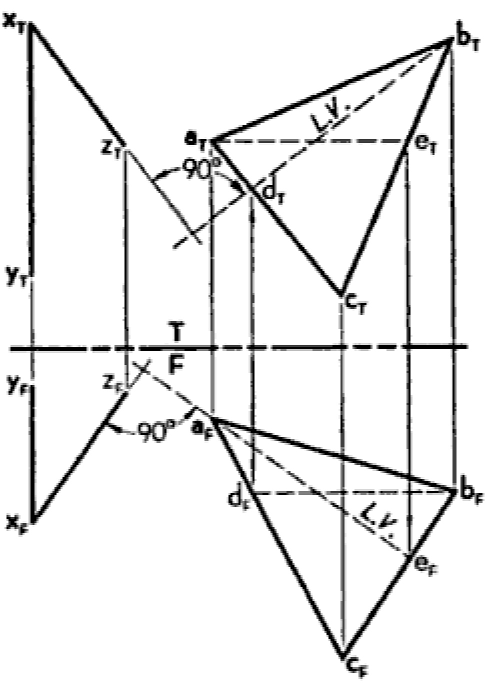


Fig. 4·40. Plano que pasa por una línea dada y es perpendicular a otro plano.

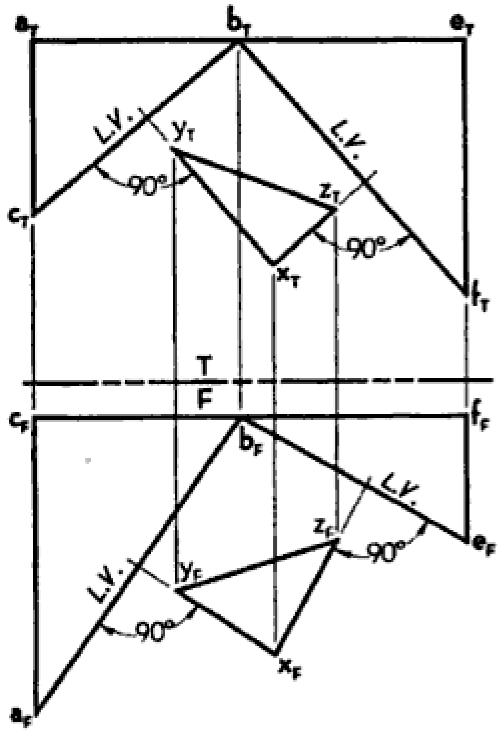


Fig. 4·41. Plano que pasa por un punto y es perpendicular a otros dos planos.

PROBLEMA. En la figura 4·41 nos dan el punto X y los planos ABC y BEF.
CONSTRUCCIÓN. Se traza la línea XY perpendicular al plano ABC, estando BC en su verdadera longitud en la proyección horizontal, lo mismo que AB en la proyección vertical. La línea XZ es perpendicular al plano BEF. De ese modo tenemos el plano pedido XYZ. Los puntos Y, Z son dos cualesquiera de las perpendiculares.

PROBLEMAS. Grupo 41.

4·36. Proyección de un punto sobre un plano

La traza o proyección de un punto sobre un plano, es el punto de intersección con el plano de la perpendicular trazada desde ese punto.

ANÁLISIS. Se pueden emplear solamente las proyecciones dadas, observando que la solución implica dos operaciones, a realizar en esas proyecciones, que son las siguientes:

1. *Trazar la perpendicular al plano desde el punto dado.*
2. *Trazar la intersección de esa perpendicular con el plano.*

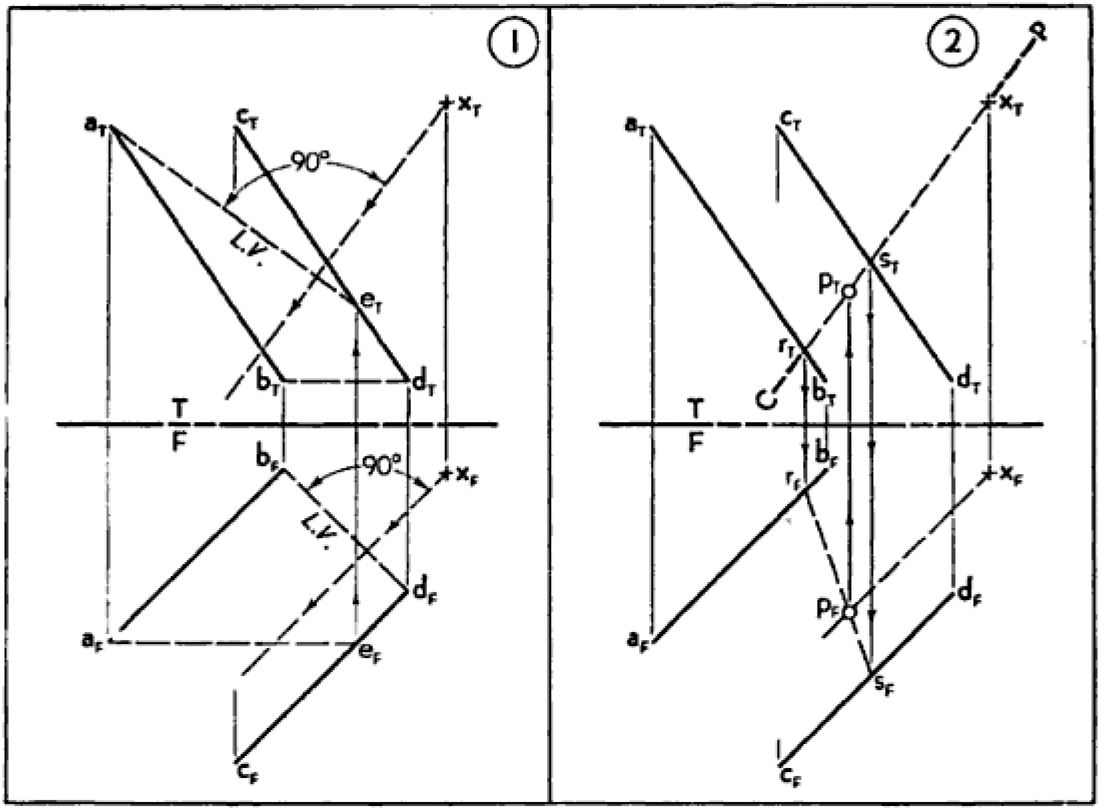


Fig. 4·42. Proyección de un punto sobre un plano.

PROBLEMA. En la figura 4·42 se conoce la situación del punto *X* y la del plano definido por las paralelas *AB* y *CD*, pidiéndose la proyección del punto *X* sobre el plano *ABCD*.

Fase 1. Desde el punto X trazar una perpendicular de longitud indefinida. Se han seleccionado las líneas *AE* y *BD* como de longitud verdadera, en las proyecciones horizontal y vertical respectivamente. Desde x_T se traza una perpendicular indefinida a a_Te_T, y desde x_F otra perpendicular a b_Fd_F teniendo así la perpendicular solicitada.

Fase 2. Encontrar la intersección de la perpendicular y el plano.

Por la perpendicular encontrada se traza el plano cortante *C-P*, siendo *RS* la intersección con el plano dado, y la intersección de la perpendicular con r_Fs_F es el punto solicitado p_F, que trasladado a la proyección horizontal nos da la otra proyección p_T del punto pedido *P*.

OBSERVACIÓN. Las dos fases dichas no indican una dependencia determinada en la determinación del punto *P*. Es decir que la intersección de x_Tp_T con

a_Te_T no es precisamente el punto p_T; pues las líneas *AE* y *BD* de longitud verdadera se trazaron al azar y no para determinar el punto específico *P*.

Problemas. Grupo 42.

4·37. Proyección de una línea sobre un plano

Análisis. Este problema no deja de ser una ampliación del tratado anteriormente, pues al determinar la proyección de dos puntos de esa línea quedará ésta determinada, bastando unir esas dos proyecciones.

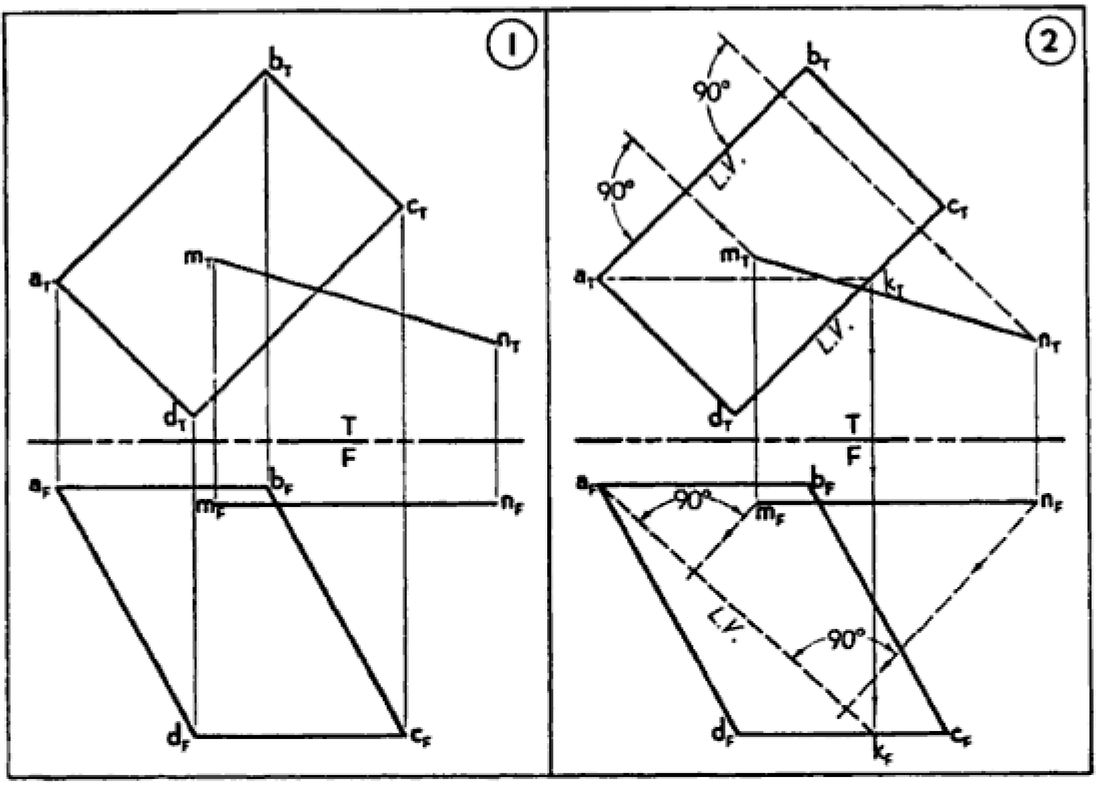


Fig. 4·43. (Caso 1 y 2). Proyección de una línea sobre un plano.

Problema. En la figura 4·43, fase *1*, se muestra el plano dado *ABCD* y la línea *MN* que tiene que ser proyectada sobre ese plano.

Fase 2. Trazar dos perpendiculares desde la línea al plano.

En el plano *ABCD* la línea *AB* figura en su longitud verdadera en la proyección horizontal, lo mismo que la línea trazada *AK* para que aparezca en longitud real en la proyección vertical. Las perpendiculares desde *M* y *N* a estas líneas de longitud real marcará la dirección de las perpendiculares, en cada proyección.

Fase 3. Encontrar las intersecciones de las perpendiculares con el plano.

En la proyección horizontal se han trazado los planos *C-P*-1 y *C-P*-2, cortantes con el plano dado, que pasan por las perpendiculares antes trazadas, figurando también sus trazas en la proyección vertical, con el plano *ABCD*, se-

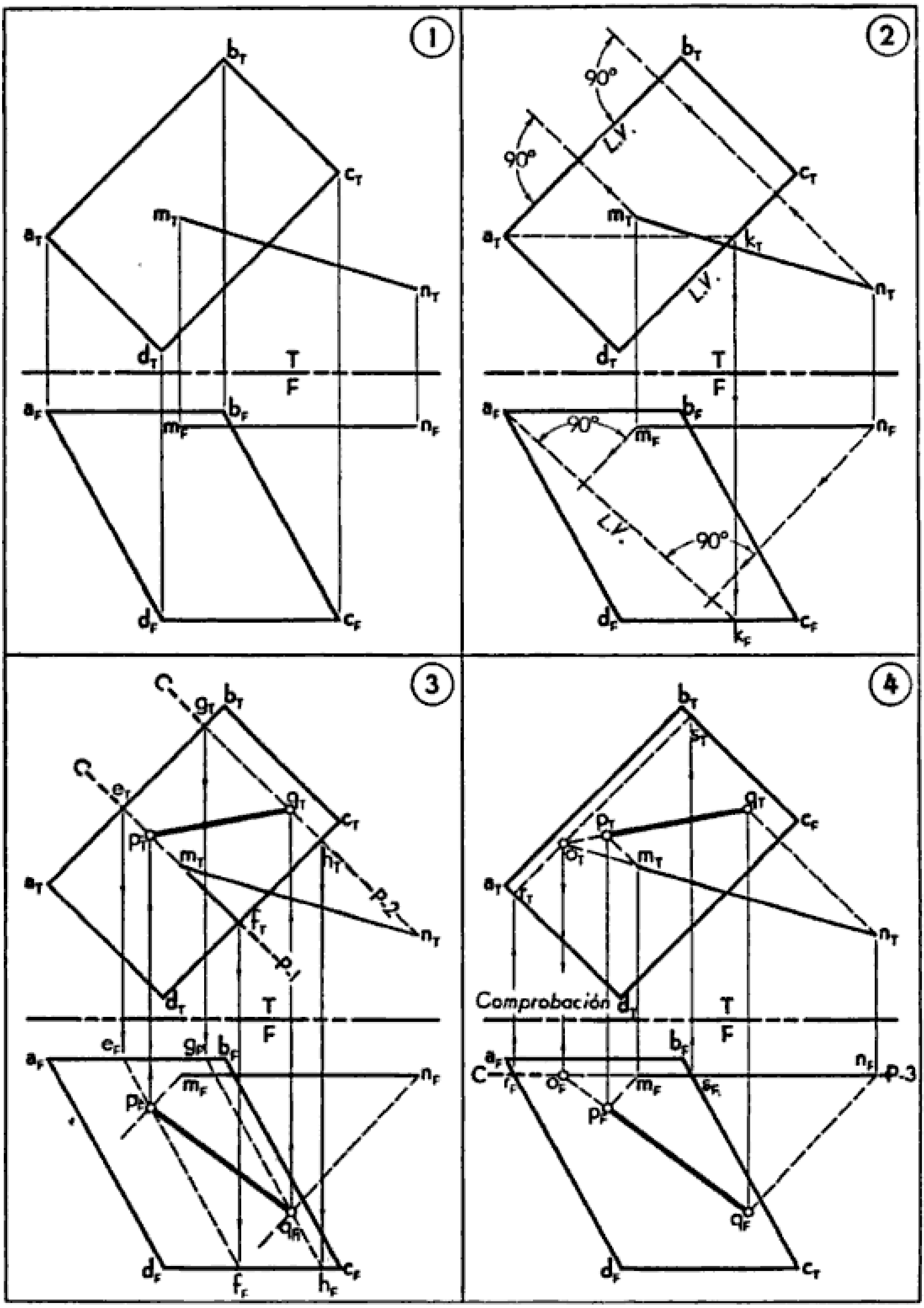


Fig. 4-43. Proyección de una línea sobre un plano.

4·40. Angulo que forman una línea y un plano (método de proyección de perfil)

Análisis. En el artículo 3-7 definimos como ángulo de pendiente de una línea el formado por esa línea con un plano horizontal, mostrándose este ángulo en una proyección en que el plano horizontal figurase *de perfil* y la línea en su *longitud real*. Pues lo mismo sucederá ahora entre plano y línea que sean oblicuos, debiendo cumplirse la condición siguiente:

Primero se muestra al plano de perfil, luego, en su tamaño verdadero, y por último con una tercera proyección, otra vez al plano de perfil cuando la línea figure en su longitud verdadera.

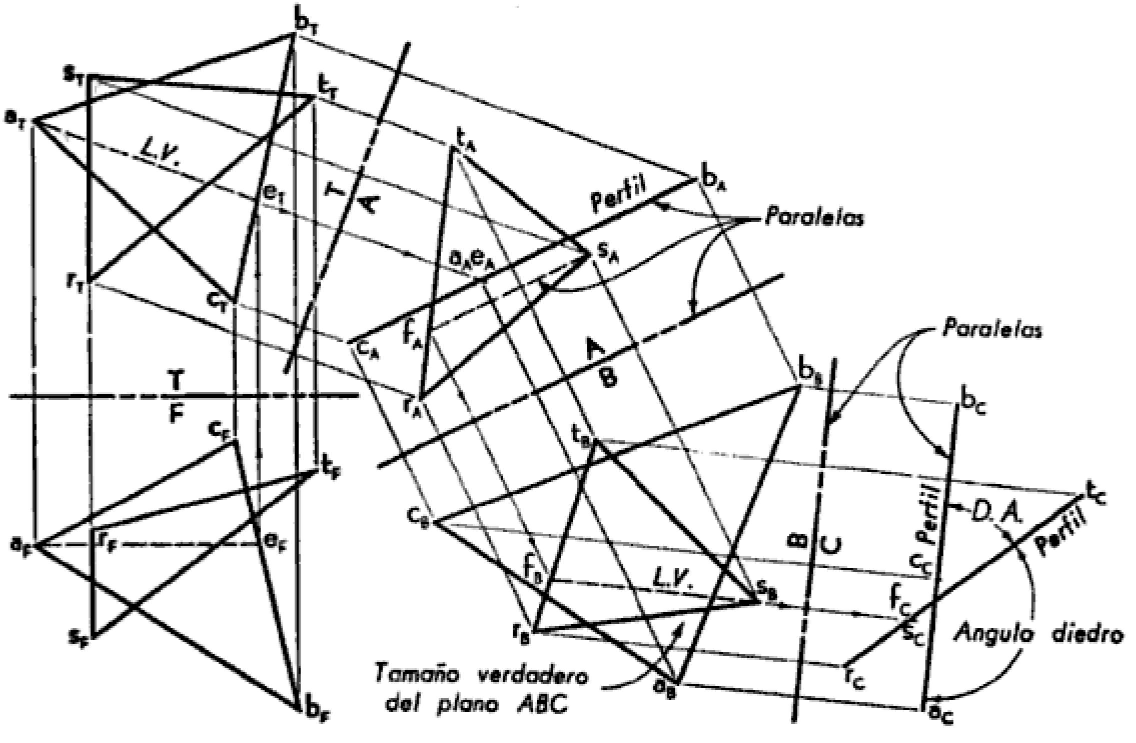


Fig. 4·45. Angulo diedro en el que no se conoce la línea de intersección.

Problema. En la figura 4·46 se dan el plano *ABC* y la línea *MN*, pidiéndose el ángulo que forman.

Construcción. Siguiendo el procedimiento que hemos indicado, en la proyección *A* el plano *ABC* se representa como una línea, no estando *MN* en su longitud real. En la proyección *B* el plano figura en su tamaño real, aunque no se precise su trazado. La línea de referencia *B-C* se traza paralela a $m_B n_B$, con lo que $m_C n_C$ indicará la longitud real de *MN*, pudiéndose medir el ángulo entre esa línea y el plano de perfil.

Aplicaciones corrientes. El caso citado requiere hallar tres nuevas proyecciones, pero si el plano dado figurase ya de perfil nos ahorraríamos una proyección. En la figura 4·47, por ejemplo, una tubería oblicua corta a dos paredes verticales, solicitándose los ángulos que forma con ellas. Como la pared posterior figura en su tamaño en la proyección vertical, en la proyección adyacente *A* se observa el ángulo que forma la tubería con la pared posterior. La pared lateral está de perfil, es decir que en la proyección *L* estará en su tamaño verdadero, apareciendo en la *B* el otro ángulo pedido.

Resumen. En todos los casos el método es el mismo: siempre se obtendrá, o será dada una proyección de *perfil*, para obtener luego una *proyección de tamaño real*, y finalmente la proyección con el *plano de perfil* y la *línea en longitud real*.

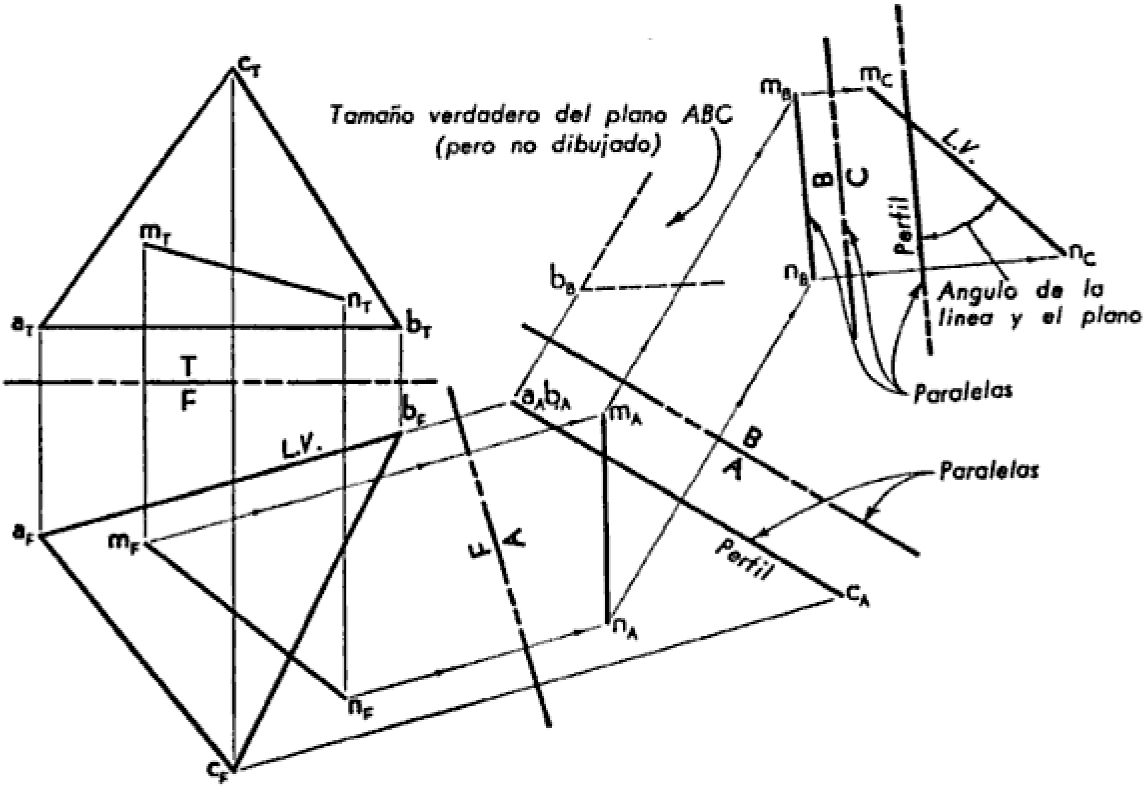


Fig. 4·46. Angulo formado por una línea y un plano (método de proyección de perfil).

4·41. Angulo formado entre una línea y un plano (método del ángulo complementario)

Análisis. Si una línea forma un ángulo *L* con un plano y un ángulo *C* con la perpendicular a ese plano, estos ángulos, *L* y *C*, son *complementarios*. Este principio se ilustra en el esquema gráfico de la figura 4·48, donde la línea *MN* forma el ángulo *L* con el plano *ABCD*; siendo *NQ* la perpendicular al plano, y *PQ* la proyección de *PN* sobre el plano. El triángulo *PQN* será rectángulo, y los ángulos *L* y *C* serán complementarios. Luego en vez de buscar el ángulo *L* podemos encontrar el *C*. La solución comprende dos partes:

1. *Trazar desde el punto una perpendicular al plano.*
2. *Construir una proyección del plano en tamaño verdadero, conteniendo la línea dada y la perpendicular al plano.*

Problema. En la figura 4·48 se dan el plano *ABC* y la línea *MN*, como en la figura 4-46, pidiéndose el ángulo de la línea y el plano.

CONSTRUCCIÓN. Desde el punto N se ha trazado una perpendicular al plano, por el método de las dos proyecciones del artículo 4-32. No es necesario encontrar el punto donde la perpendicular corta al plano, escogiendo un punto cualquiera O de esa perpendicular, siendo el ángulo MNO complementario del buscado. Solamente queda representar este ángulo en su valor verdadero.

En la proyección A el plano MNO se representa como una línea. Para conservar los tamaños verdaderos en la proyección B dentro de los límites del papel, la línea A-B se toma detrás de la proyección A, no cambiando el sistema de alineaciones y medidas (obsérvese la distancia d). En la proyección B el ángulo complementario lo forman las líneas m_Bn_B y la perpendicular n_Bo_B, la diferencia a 90° será el ángulo pedido. Con dos proyecciones se suele resolver este problema.

En todas las vistas auxiliares se observa que tan pronto se traza la perpendicular al plano se prescinde del plano dado, mostrándose únicamente el plano de la línea dada y la perpendicular.

PROBLEMAS. Grupo 45.

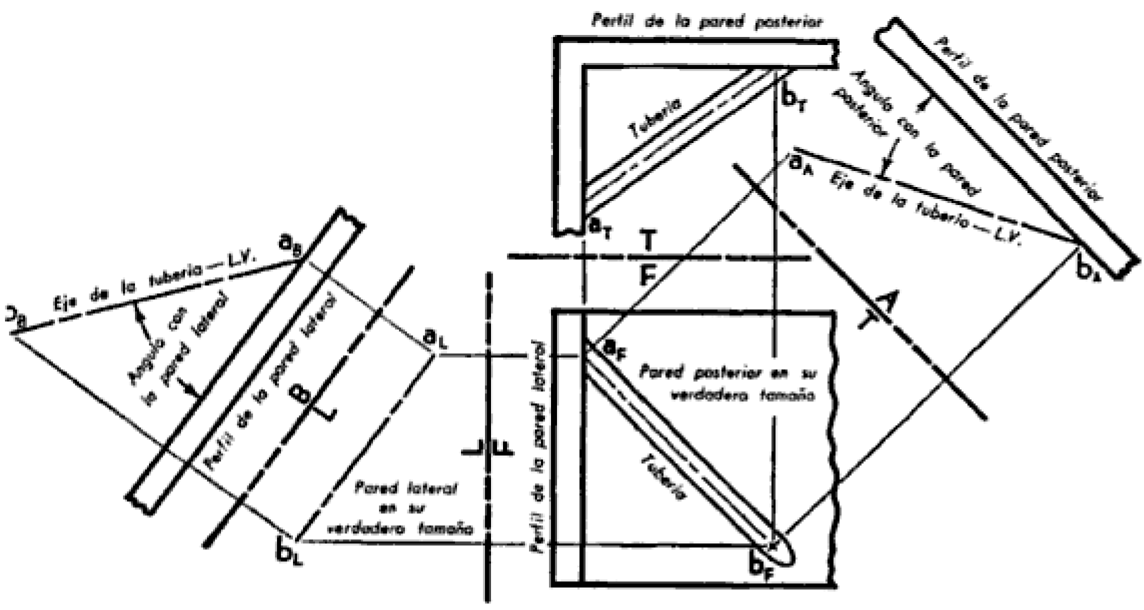


Fig. 4·47. Angulos formados por una línea y dos planos verticales.

4·42. Situación de un cuerpo sobre una superficie plana

En la práctica es necesario frecuentemente tener que unir soportes de escuadras, abrazaderas, mordazas, puntales, etc., a determinadas superficies oblicuas o inclinadas; esto puede hacerse corrientemente por medio de proyecciones auxiliares, que representen la superficie plana, primero de perfil y luego en su verdadero tamaño. Se coloca luego el cuerpo sobre el plano, en posición correcta, en las proyecciones auxiliares, para luego trasladarlas a las proyecciones dadas por el método normal de alineaciones y medidas.

PROBLEMA. En la figura 4-49 se trata del prcblema de diseñar la unión de un mamparo inclinado, del fuselaje de un avión, a un soporte de escuadra del tipo dado en el esquema indicado de la fase 1. Este soporte de escuadra, remachado sobre la superficie del mamparo, sirve de agarradero al extremo de la culata del tirante de varilla, estando esta terminación unida al soporte por medio de un perno, como se indica por las líneas de trazos de la figura. En la fase 1.ª se dan las proyecciones horizontal y vertical de la superficie del mamparo, la línea central del mismo, *CD*, y la línea *AB* que representan la línea central del tirante de varilla. Las condiciones del problema son: (1) encontrar los valores de los ángulos que forman la *varilla* con la *línea central del mamparo*, o la superficie del mamparo con la línea central de la varilla; (2) con esas medidas angulares diseñar un sencillo soporte de escuadra, y (3) mostrar el soporte montado en las dos proyecciones horizontal y vertical.

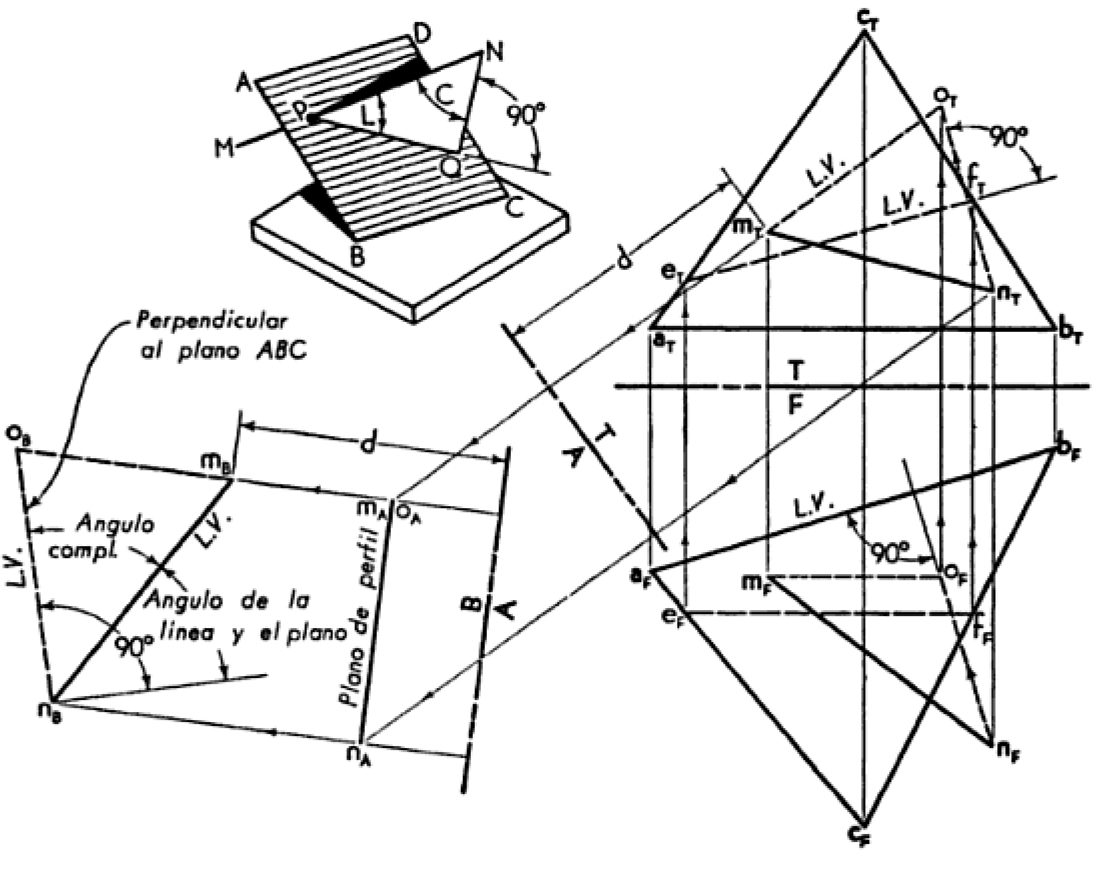


Fig. 4·48. Angulo formado por una línea y un plano (método del ángulo complementario).

Fase 1. Dibujar las nuevas proyecciones para encontrar los dos ángulos.

Ya que en la proyección vertical figura la superficie del mamparo como una línea, en la proyección *A* aparece en su verdadero tamaño, y por lo tanto la base del soporte también aparece en su magnitud real; tendremos entonces el ángulo $c_A a_A b_A$, formado por la línea central del mamparo con la varilla. En la proyección *B* adyacente, se muestra la línea central de la varilla en su longitud verdadera, apareciendo de nuevo la superficie del mamparo de perfil; es ahora cuando el ángulo solicitado *CAB* aparece en su valor real, al medirse $c_B a_B b_B$.

Fase 2. Diseñar el soporte en las nuevas proyecciones, retornando todos los puntos y líneas encontradas a las proyecciones iniciales.

En la proyección B hay que dibujar el soporte en su tamaño real, situando el centro del orificio del perno de la culata en la línea central AB de la varilla y alineando los dos orificios del remache con el punto A. El soporte se puede dibujar completamente en la proyección A y B, y luego con alineaciones y medidas trasladar varios puntos de este objeto a las proyecciones horizontal y vertical dadas, habiendo omitido las líneas ocultas en la proyección horizontal.

Los puntos de tangencia e_B y f_B, del arco circular en la proyección B, deberán determinarse exactamente para encontrar los puntos E y F, que localizados en las proyecciones dadas ayudarán a dibujar las líneas elípticas. Las elipses que aparecen en las proyecciones dadas, horizontal y vertical, pueden dibujarse más fácilmente determinando sus ejes, como ya se explicó en el artículo 4·17. En la proyección vertical, por ejemplo, los ejes mayor y menor de las elipses del orificio del perno de la culata son, respectivamente, perpendicular y paralelo a la línea de referencia F-A. En la proyección horizontal el eje mayor de estas elipses dichas es paralelo a la línea FG de longitud real, suponiendo horizontal, en la proyección vertical, f_Fg_F. Se localiza luego el punto g_A y g_T para establecer la línea f_Tg_T. Una proyección auxiliar (no dibujada) en dirección de la flecha C mostraría al plano de la elipse referida como una línea, y la longitud verdadera del eje menor de ese orificio, lo cual es muy útil. Los círculos de los orificios de los remaches, en la proyección vertical, aparecen proyectados de canto, siendo el eje mayor perpendicular a la línea de referencia T-F.

PROBLEMAS. Grupo 46.

correctamente su posición en ambas proyecciones. Si el punto X ha girado, por ejemplo 150°, las nuevas posiciones del punto X serán: x_T^R, x_F^R, que están en la misma paralela.

Resumen. Si el eje apareciera inclinado u oblicuo, la trayectoria del punto X aparecería como una elipse, en una o en las dos proyecciones; para evitar, en lo posible, tales complicaciones efectuaremos los giros precisos solamente cuando el eje se proyecte como un punto y en su longitud verdadera. Por ello establecemos el siguiente principio básico de revolución:

> **Regla 16. Regla de revolución.** *La trayectoria circular de cualquier punto, girando alrededor de cualquier eje, aparece siempre como un círculo, desde el punto de vista del eje; y como una línea perpendicular al eje, en la proyección de longitud verdadera de ese eje.*

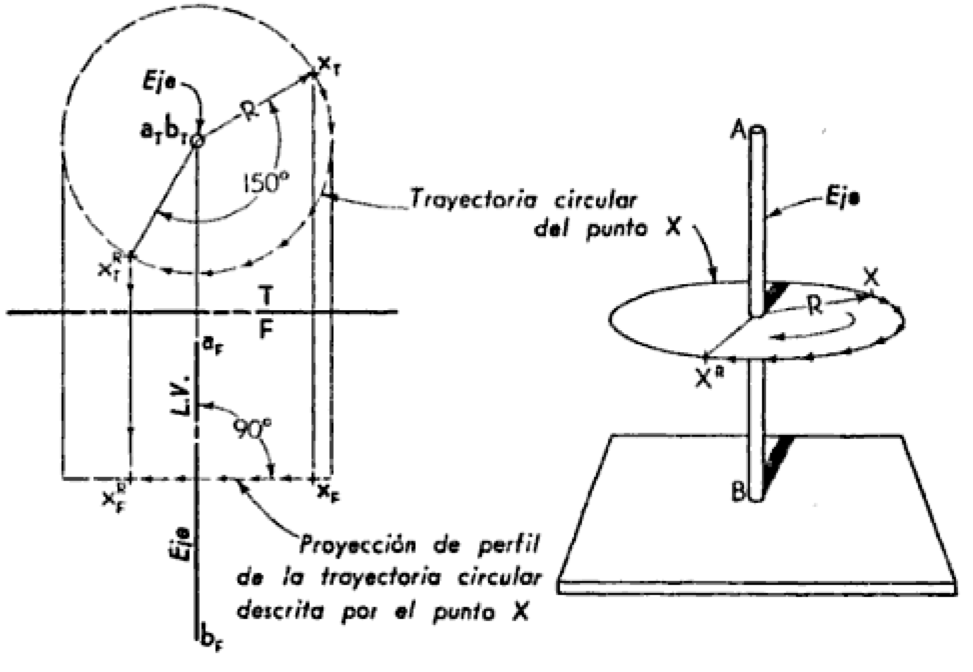


Fig. 5·1. Giro de un punto alrededor de un eje vertical.

5·2. Revolución de un punto alrededor de un eje oblicuo

Análisis. Como el plano del círculo, engendrado por el punto que gira alrededor del eje, ha de ser perpendicular a ese eje oblicuo, entonces esa circunferencia descrita aparecerá como una elipse. Pero la construcción de tales elipses es molesta y, afortunadamente, innecesaria, ya que el proceso de revolución puede ser realizado fácilmente con proyecciones auxiliares que:

Muestren al eje en su longitud verdadera y como un punto.

Problema. En la figura 5·2, la línea AB es el eje dado. Alrededor de este eje el punto X ha girado 90°, en el sentido de las agujas del reloj, mirando desde el extremo superior A del eje; o en sentido contrario visto desde el extremo inferior B. Encontrar las proyecciones.

CONSTRUCCIÓN. Se trazan las proyecciones *A* y *B*, para mostrar al eje en su verdadera longitud y como un punto. En la proyección *B* el punto x_B está separado del eje a_Bb_B el radio *R* del circulo de la trayectoria. Este circulo aparece como una línea perpendicular al eje, en la proyección *A*, con un valor 2*R*.

El punto x_B giró 90° pasando a la posición x_B^R mientras el punto x_A se mueve perpendicularmente al eje hasta el punto x_A^R.Y como el movimiento de los puntos está sujeto a las leyes de alineación y de similaridad, los puntos x_A^R y x_B^R tiene que estar en la misma paralela. Y por alineación y medidas podemos encontrar en las proyecciones *A* y *B* los puntos x_F^R y x_T^R. Las elipses se muestran en las proyecciones iniciales solamente para resaltar la posición de los puntos.

OTRAS DETERMINACIONES. La posición solicitada del punto girado, puede ser determinada de otras maneras. Supongamos, por ejemplo, que el punto *X*, de la figura 5·2 se solicita su situación de giro en la posición más baja. En este caso debemos fijarnos en la proyección *B* y sobre todo en la *A*, por ser ésta una vista elevada. En la proyección *A* el punto más bajo es el $x_A^{R'}$, que en la *B* se corresponde con el $x_B^{R'}$, hallando por alineación los puntos $x_T^{R'}$ y $x_F^{R'}$.

PROBLEMAS. Grupo 47.

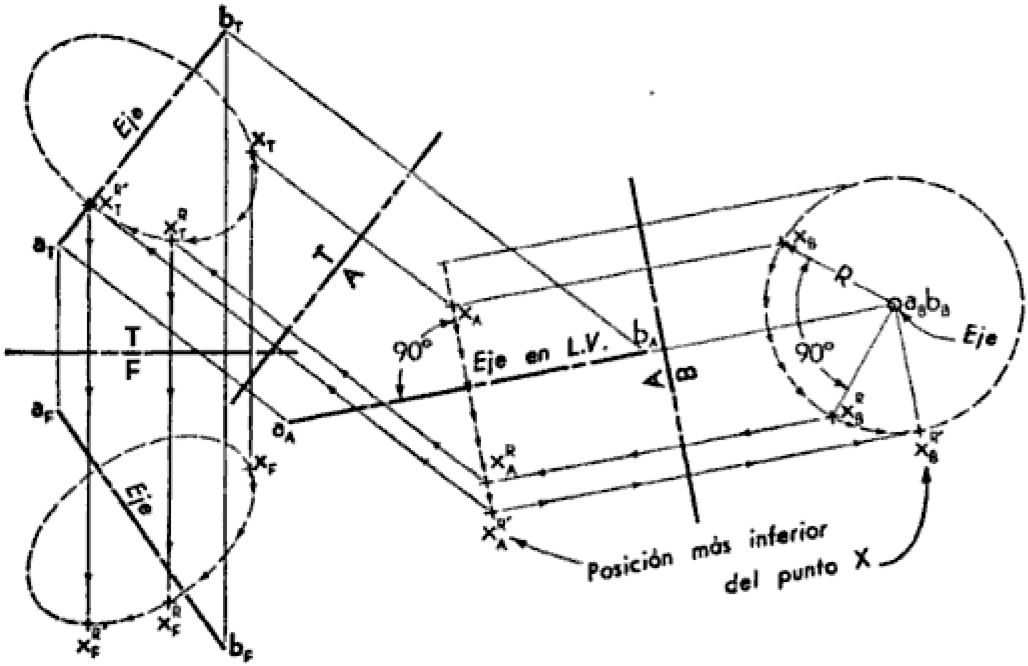


Fig. 5·2. Un punto girando alrededor de un eje oblicuo.

5·3. Revolución de una línea alrededor de un eje oblicuo

ANÁLISIS. La revolución de una línea alrededor de un eje oblicuo puede realizarse girando dos puntos cualesquiera de la línea, siguiendo el método anterior de la figura 5·2, y girando cada punto el *mismo valor angular*. Un cuerpo al girar cambia de *posición*, pero no de tamaño o forma, sin variar la longitud de la línea que gira cualquiera que sea la amplitud angular girada. En este sentido deberán fijarse, sobre todo, los principiantes.

CASO 1. GRADO DETERMINADO DE REVOLUCIÓN. La figura 5-3 indica la revolución de la línea XY en un giro de 90°, en el sentido de marcha de las agujas del reloj cuando se mira desde B hacia A, alrededor del eje AB. El primer paso será hallar las proyecciones A y B, para que el eje aparezca en su verdadera longitud y luego como un punto. Después en la proyección B se hará el giro de 90° de la línea XY, y por alineaciones y medidas trasladar esta nueva posición a las proyecciones dadas.

En la proyección B, los extremos de la línea x_B y y_B han girado cada uno el mismo ángulo de 90° pasando a las posiciones x_B^R y y_B^R luego la posición de la línea girada será $x_B^R y_B^R$. En la proyección A los puntos x_A, y_A, al girar los 90°, se mueven perpendicularmente al eje en longitud real, y por ello se encontrarán en las intersecciones de las paralelas, trazadas desde la proyección B, con esas perpendiculares. encontrándose los nuevos puntos en x_A^R, y_A^R, y por tanto la línea será $x_A^R y_A^R$. Entonces, por alineaciones, tendremos las nuevas líneas en las proyecciones horizontal y vertical. Solamente en la proyección B, de eje proyectado en punto, el giro no ha cambiado la longitud de la línea.

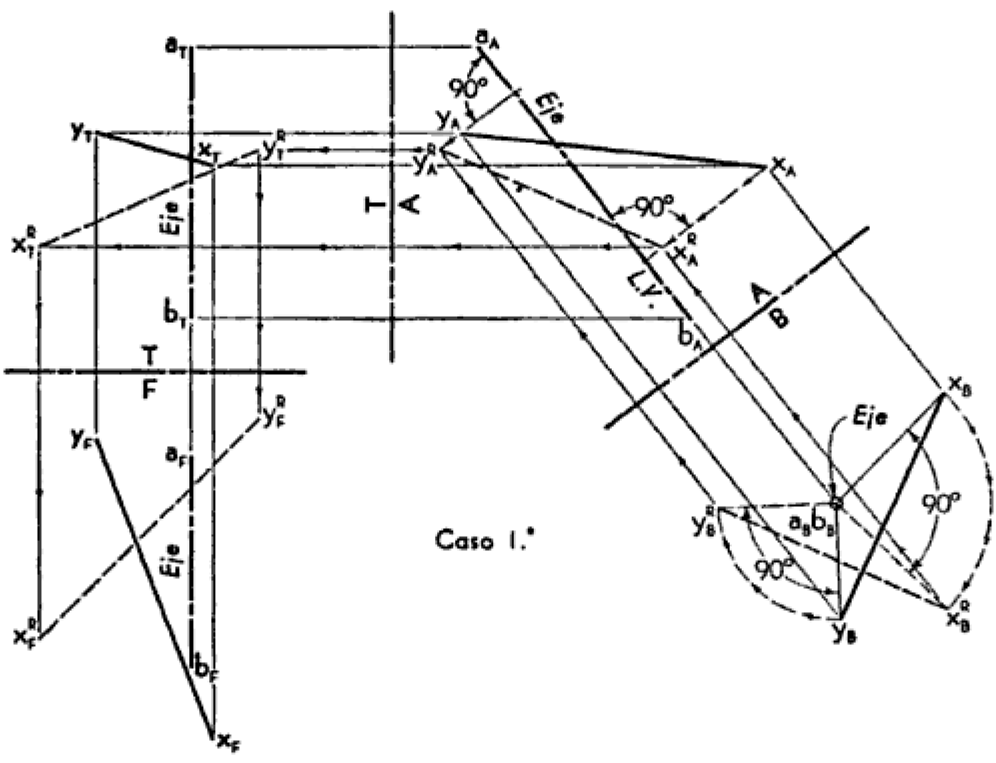


Fig. 5-3. Giro de 90° de una línea alrededor de un eje oblicuo.

CASO 2. GIRO A UNA POSICIÓN DETERMINADA. La figura 5-4 nos expresa la misma línea XY que ha girado alrededor del eje AB hasta ponerse de perfil. En este caso el número de grados de rotación que se precisen es desconocido. Pero para que una línea aparezca en su verdadero valor en la proyección A, se precisará que en la adyacente B sea paralela a la línea de referencia A-B. Por eso la línea $x_B y_B$ tiene que girar hasta quedar paralela a A-B. Para ello se traza desde el eje una perpendicular $a_B b_B$-p_B que cuando sea perpendicular a la línea de referencia *A-B* indicará que $x_B^R y_B^R$ será paralela a *A-B*. En la proyección *A* se encontrará $x_A^R y_A^R$, valor verdadero de *XY*, y por alineaciones se hallan las proyecciones vertical y horizontal de esta línea *XY* puesta ya de perfil.

PROBLEMAS. Grupo 48.

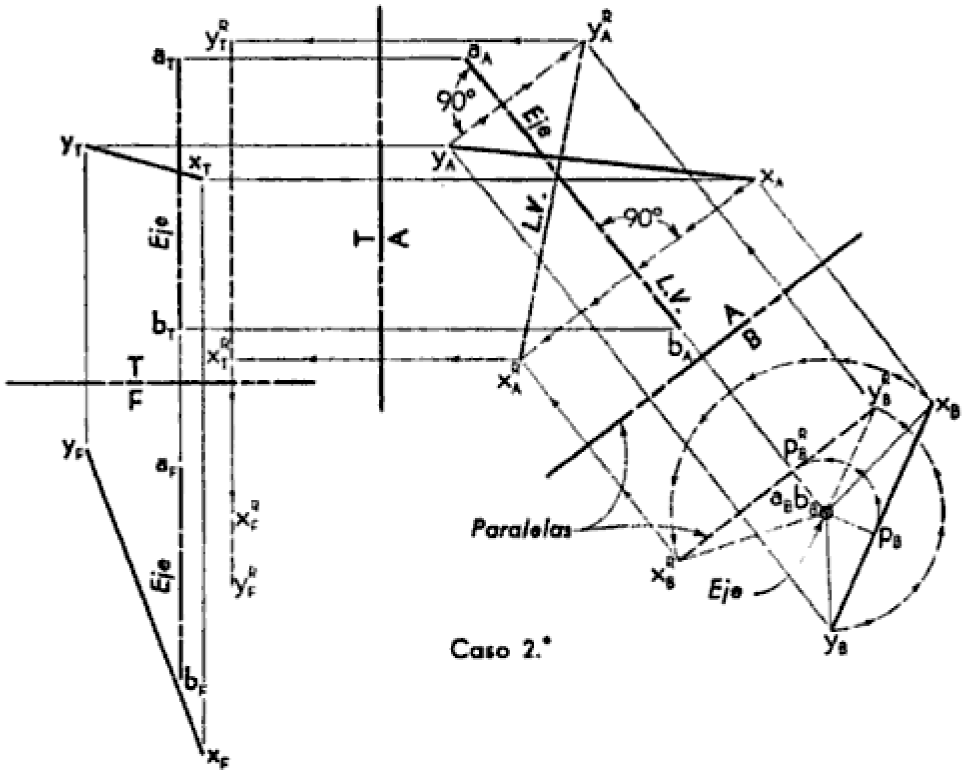


Fig. 5·4. Línea que gira alrededor de un eje oblicuo hasta ponerse de perfil.

5·4. Ejes superpuestos

En los artículos precedentes el principio fundamental de los giros se ha aplicado a puntos y líneas, que giran alrededor de determinados ejes bien especificados, aplicándose a casos de líneas oblicuas para demostrar el caso más general. Aunque estos giros, alrededor de ejes oblicuos, se solicitan en casos determinados, lo más frecuente es emplearlos como un medio para resolver algunos problemas, planteados por el dibujante, de acuerdo con las características del problema.

En los artículos siguientes cierto número de problemas típicos se resolverán por el método de los giros; en otras palabras, los giros se emplearán para variar la posición del objeto, y en cada caso la dirección y situación del eje de revolución se supondrá de acuerdo con el deseado cambio de posición del objeto. Pero, sin embargo, no hay que olvidar, en los ejes supuestos, que en las proyecciones que se obtengan de esos ejes serán para representarlos en su verdadera longitud y como un punto (regla 16).

CONSTRUCCIÓN: EJE VERTICAL. En la proyección horizontal el eje vertical figura en un punto, pero se simplifica la solución si el eje corta a la línea dada en un punto tal como el A. En la figura 5-6 el eje figura en a_T y en la perpendicular desde a_F a la línea de referencia T-F. En el gráfico de la derecha aparece el eje vertical y la línea AB girando alrededor de él. El punto B describirá una trayectoria circular, permaneciendo fijo en el mismo sitio el punto A. En la proyección horizontal al pasar el punto b_T a la posición b_T^R o $b_T^{R'}$ se pone paralelo a T-F, luego en las posiciones correspondientes de la proyección vertical la línea AB estará en su verdadera longitud. El punto b_F se mueve perpendicularmente al eje pasando a las posiciones b_F^R o $b_F^{R'}$, y las líneas de trazos $a_Fb_F^R$ y $a_Fb_F^{R'}$ expresan la longitud real de AB.

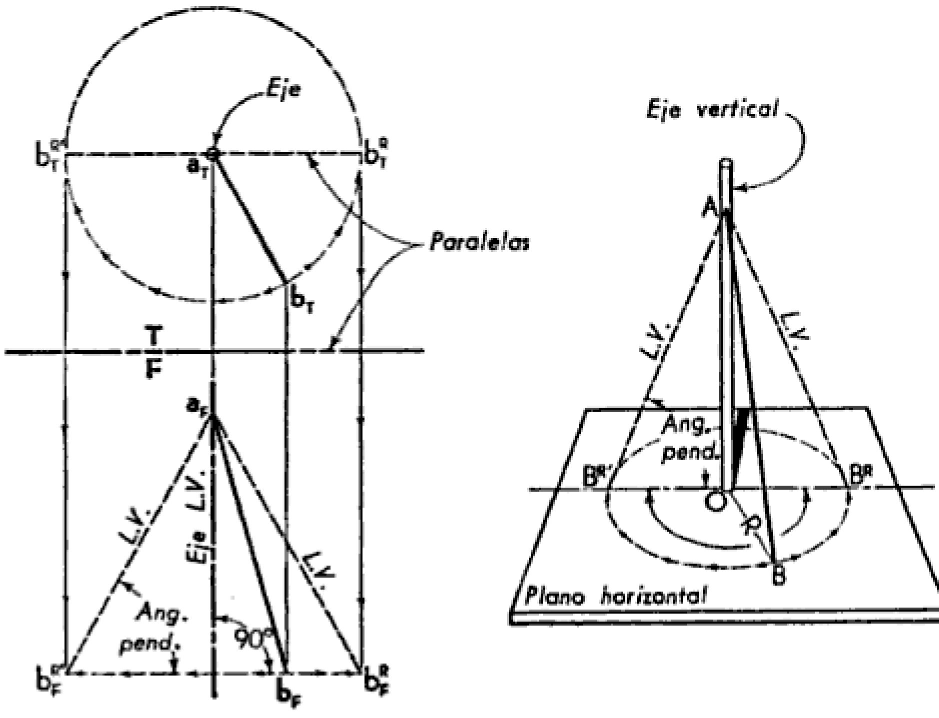


Fig. 5·6. Longitud verdadera de una línea girando alrededor de un eje vertical.

CONSTRUCCIÓN: *Eje horizontal perpendicular al plano vertical.* En la figura 5·7 vemos la misma línea AB girando alrededor del eje horizontal perpendicular al plano vertical que se proyecta en el punto A en la proyección vertical. El punto b_F se mueve describiendo un arco, pasando a la posición b_F^R para que la línea a_Fb_F quede paralela a T-F. En la proyección horizontal el movimiento del punto b_T es siempre perpendicular al eje, pasando a la posición b_T^R, directamente encima de la proyección vertical b_F^R La línea $a_Tb_T^R$ indicará la verdadera longitud de la línea AB, que tiene la misma longitud que la encontrada en la figura 5·6.

Cuando se tienen que encontrar las longitudes verdaderas de series de líneas, este método de giro es el más adecuado y más rápido que el método de proyecciones auxiliares, empleándose en los problemas de desarrollos de superficies (art. 10·11).

gulo figure como una linea, el ángulo que forma esta línea con la horizontal será el ángulo de pendiente buscado. Si el giro fuera hecho alrededor de otro eje en que el plano figurará como una linea, ya no indicaria el ángulo de pendiente.

PROBLEMAS. Grupo 50.

5·9. Tamaño verdadero de un plano

ANÁLISIS. Un plano se puede mostrar en su tamaño real, girándole hasta que sea perpendicular a la linea visual, en una de las proyecciones, pero eso indicará que en una proyección adyacente este plano ha de figurar como una linea paralela a la linea de referencia. De lo que se deduce:

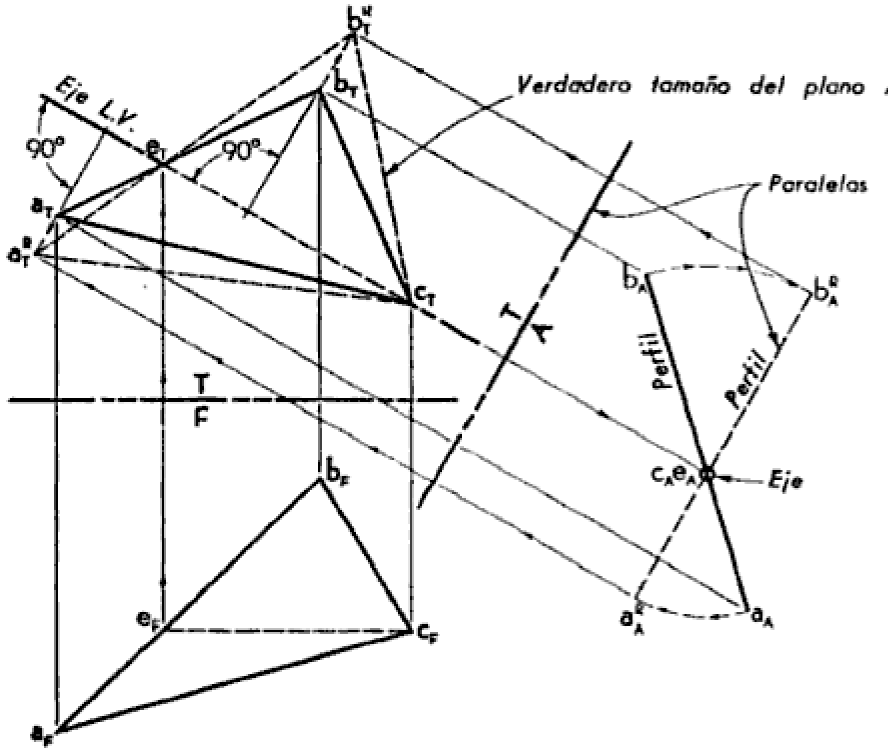


Fig. 5·10. Tamaño verdadero de un plano por revolución.

Se gira el plano alrededor de un eje situado en el mismo, apareciendo este eje en su longitud verdadera, en la proyección en que se precise el tamaño real.

PROBLEMA. En la figura 5·10 girar el plano *ABC* hasta que se represente en su tamaño real en la proyección horizontal.

CONSTRUCCIÓN. El eje de revolución tiene que estar en longitud verdadera en la proyección horizontal, seleccionando a la línea *EC* como eje. Pero, aplicando la regla 16, el eje tiene que proyectarse como un punto, trazando la proyección auxiliar *A*. Entonces el plano se ha proyectado como una línea, debiendo girarla hasta que sea paralela a la línea de referencia T-A. Los puntos a_A y b_A siguiendo trayectorias circulares pasarán a las posiciones a_A^R y b_A^R, mientras los vértices a_T y b_T han pasado a las posiciones a_T^R y b_T^R. Los puntos E_R y $_R C$ no se mueven y ya tenemos el triángulo en su verdadero tamaño, en $a_T^R b_T^R c_T$, sin tener que hacer giros en la proyección vertical.

RESUMEN. Un plano puede girar, en cualquier proyección, hasta que aparezca en su tamaño verdadero, si el eje supuesto en el plano figura también con su longitud exacta. Si quisiéramos que el triángulo *ABC* figurara, por ejemplo, con su tamaño verdadero en la proyección vertical, tendríamos que representar al eje en esa proyección en su longitud real, y como un punto en la proyección adyacente.

PROBLEMAS. Grupo 51.

5·10. Contrarrevolución o contragiro

Contrarrevolución es un proceso de volver a girar nuevamente los puntos y líneas, que habíamos encontrado, para volverlos otra vez a las posiciones iniciales. Si, por ejemplo, se ha hecho girar un plano para que apareciera en su tamaño exacto, para así trazar bisectrices, hallar ángulos, etc., cuyos nuevos elementos tienen que aparecer en las proyecciones iniciales, no habrá más remedio que hacer la contrarrevolución, camino inverso de la revolución.

PROBLEMA. En la figura 5·11 trazar un cuadrado de lado 1,25 cm en el plano *ABCD*, el centro del cuadrado debe estar a 1,375 cm del vértice *A*, y 1 cm más bajo que el vértice *B*, debiendo ser horizontales dos lados de ese cuadrado. (Este problema es el mismo que el del art. 4·15 y fig. 4·17).

CONSTRUCCIÓN. Se ha trazado la línea horizontal *EF* a 1 cm debajo del punto b_F, en cuya línea estará el centro *O* del cuadrado buscado. Para mostrar al plano *ABCD* en su verdadero tamaño, en la proyección horizontal, tendría que girar alrededor de la línea *EF*, en su valor real, pero ocurriría como en la figura 5·10, que quedarían casi superpuestos los dos planos originando confusión en el entendimiento de las líneas, por ello se puede emplear un eje paralelo a *EF* que pase por el vértice *D*. El punto o_T^R se encuentra a 1,375 cm del vértice a_T^R. El cuadrado de lado 1,25 cm $r_T^R s_T^R t_T^R v_T^R$ puede ser construido con centro en o_T^R y con dos lados paralelos a *EF*. La posición girada del cuadrado también se localiza en la proyección *A*. La posición del cuadrado tiene que contragirarse, para que en las proyecciones dadas se pueda situar la posición del mismo en el plano *ABCD*. Los puntos *R*, *S*, *T* y *V*, vuelven a girar en la proyección *A*, con trayectorias de arco, para ocupar posiciones en la original proyección de perfil del plano dado, de la proyección *A*; mientras que en la proyección horizontal estos mismos puntos se mueven perpendicularmente al eje, y por alineaciones y medidas poder encontrar este cuadrado en la proyección vertical.

PROBLEMAS. Grupo 52.

5·11. Angulo diedro

ANÁLISIS. El ángulo diedro entre dos planos debe ser medido en un plano que sea *perpendicular* a la línea de intersección de los dos planos dados, (art. 4·38). Y para encontrar sus intersecciones con los planos dados, se puede emplear el método de giros, mostrando el plano de corte y el ángulo diedro en su verdadero tamaño.

Problema. En la figura 5·12 determinar el ángulo diedro entre los planos *ABC* y *ABD* por el método de revolución.

Fase 1. Ilustrar gráficamente este proceso.

Dichos planos se cortan según la linea *AB*. Se traza el plano *DPR*, perpendicular a *AB*, que corta a esos planos, al *ABD* según *DP* y al *ABC* según *PR*; siendo el ángulo *DPR* el ángulo diedro solicitado, pero al estar en un plano oblicuo no aparecerá en su verdadero valor ni en la proyección horizontal ni en la vertical. Luego el plano *DPR* tiene que girar alrededor del eje horizontal *DS*, para tomar la posición DP^RR^R, pudiendo ahora hallar el verdadero valor del ángulo diedro en la proyección horizontal.

Fase 2. Representar la línea de intersección en su verdadera longitud.

Como el plano cortante tiene que aparecer de perfil, antes de girar, para aparecer en su verdadero tamaño (art. 5·9), tiene que construirse la proyección *A*, para mostrar la intersección en su longitud exacta. (La proyección *A* podría ser también adyacente a la proyección vertical, en cuyo caso el plano cortante deberia girarse, para figurar en su tamaño verdadero, en la proyección vertical).

Fase 3. Establecer un plano cortante perpendicular a la linea de intersección.

(Se ha omitido la proyección vertical, por no ser necesaria a la solución.)

El plano cortante *C-P* se supone de perfil en la proyección *A*, perpendicular a la intersección a_Ab_A , en cualquier punto, por ejemplo, por el punto *D*. La intersección con el plano *ABD* es d_Ap_A y con el plano *ABC* lo hace por la línea p_Ar_A.; cuyas lineas trasladadas a la proyección horizontal nos dan las líneas *DP* y *PR* que forman el ángulo diedro solicitado, debiendo aparecer estas lineas claramente en las dos proyecciones adyacentes antes de ensayar cualquier revolución.

Fase 4. Girar el plano cortante hasta que aparezca en su tamaño verdadero.

El eje tiene que mostrarse como un punto en la proyección *A*, y en su longitud verdadera en la proyección horizontal. Si escogemos el eje por el punto *D* solamente los puntos *R* y *P* tendrán que girarse, moviéndose los puntos r_A y p_A, por arcos de círculos, a las posiciones r_A^R y p_A^R, quedando el ángulo diedro *DPR* paralelo a la linea de referencia *T-A*, y por ello en la proyección horizontal se muestra ese ángulo diedro en su amplitud real. Una simplificación se puede observar al ver que la línea *PR* pasa por el punto *S*, que no se mueve durante la revolución, siendo necesario solamente girar el punto *P*.

PROBLEMAS. Grupo 53.

5·12. Encontrar el ángulo que forma una línea y un plano

Análisis. El ángulo que forman una linea y un plano no se alterará si la linea gira alrededor de un eje que sea *perpendicular al plano*. Si la línea gira hasta aparecer en su longitud verdadera entonces el ángulo de esa linea con el plano marcará su amplitud real. Un eje que sea perpendicular a un plano oblicuo figurará como un punto sólo cuando ese plano esté en su tamaño real, y ese eje aparezca con su longitud real si el plano está de perfil. Por ello:

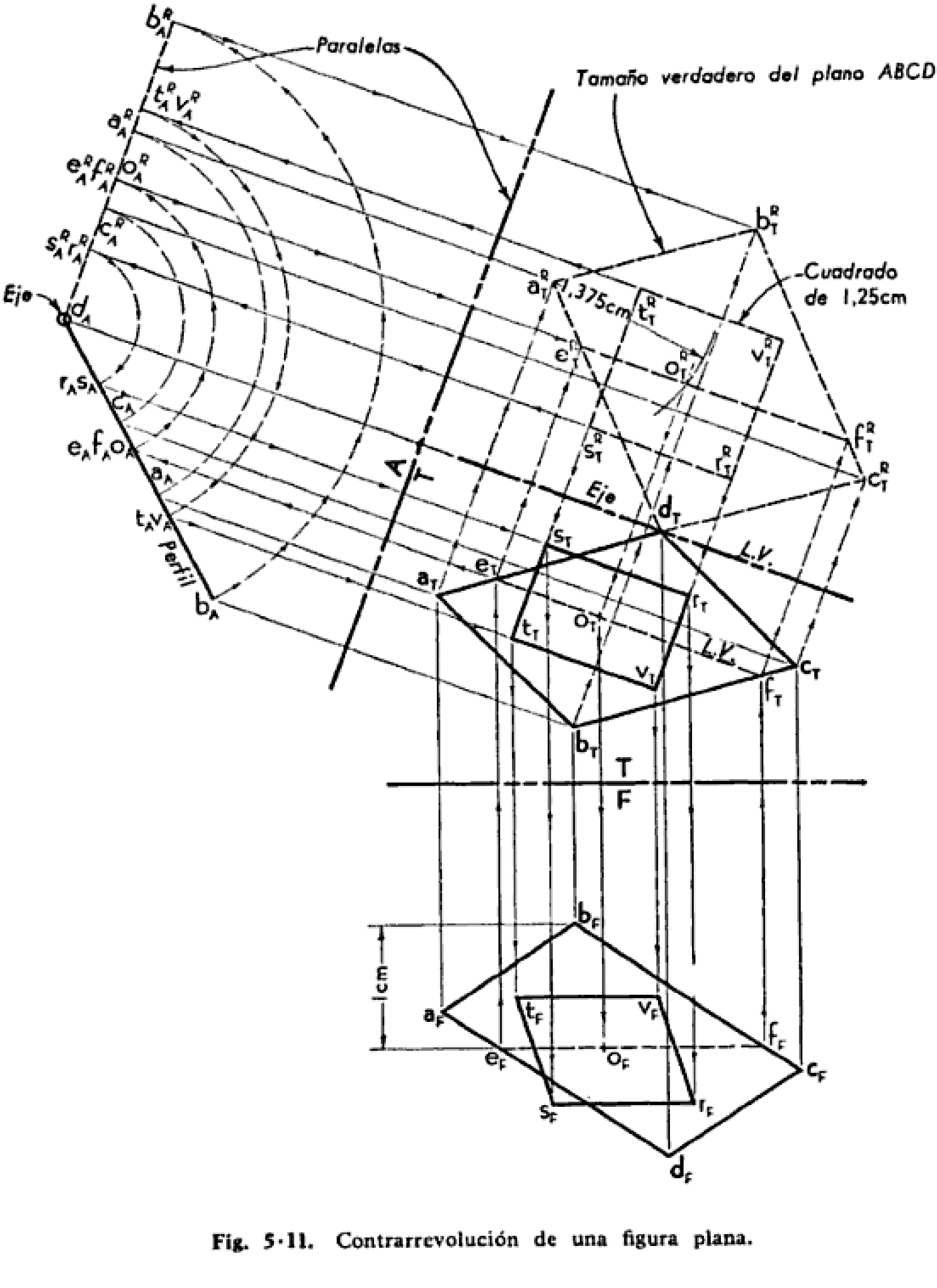


Fig. 5·11. Contrarrevolución de una figura plana.

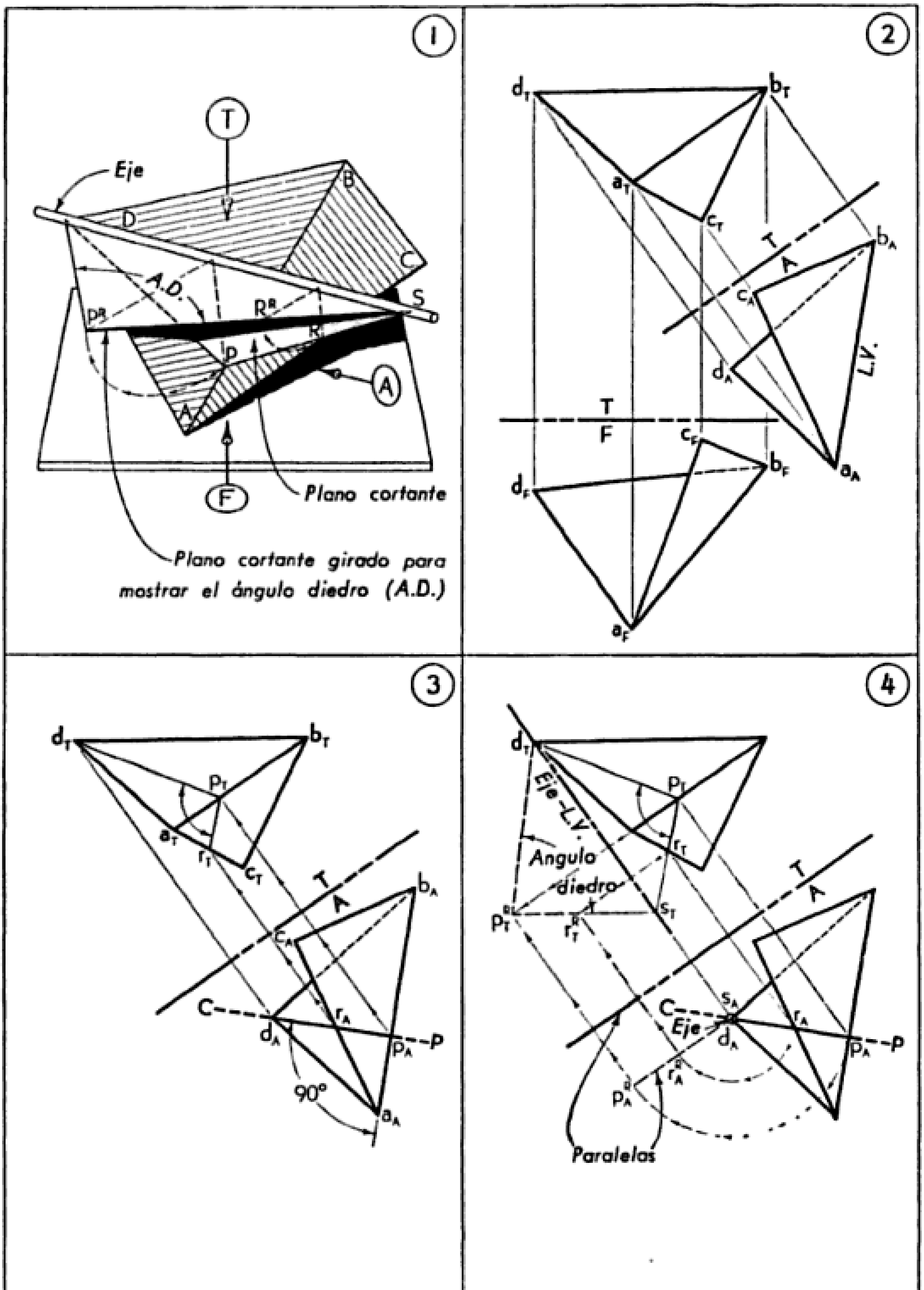


Fig. 5·12. Hallar un ángulo diedro por revolución.

que forme ángulos determinados con otras líneas o planos, se aplicará la construcción referida en dos conos de revolución.

5·14. Situar una línea que forme ángulos dados con otras dos líneas que se corten (caso especial)

PROBLEMA. En la figura 5·15 se dan dos líneas *AO* y *BO* que se cortan en el punto *O*, apareciendo en la proyección horizontal *AO* como un punto y *BO* paralelo a la línea de referencia *T-F*; luego en la proyección vertical estas dos líneas estarán en longitud verdadera, formando un ángulo de 35°, habiendo supuesto a las dos líneas en posición especial para simplificar la solución, tratando el caso general en el próximo artículo. Se pide trazar una línea o líneas que formen un ángulo de 20° con la línea *AO*, y otro de 25° con la línea *BO*.

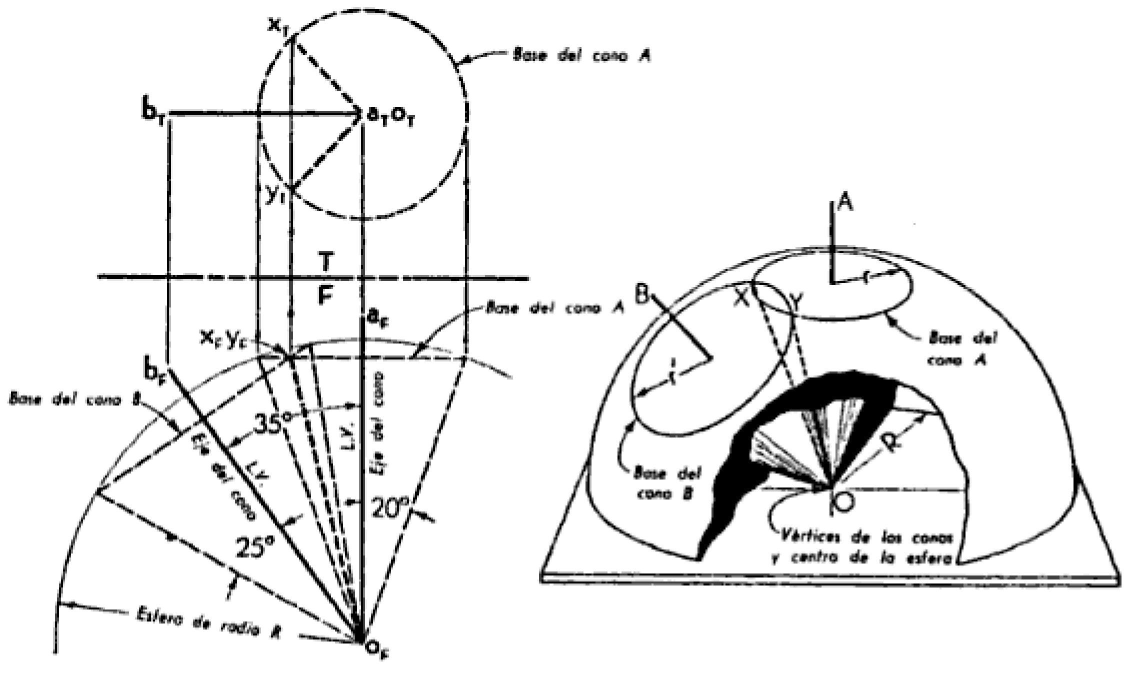


Fig. 5·15. Línea que forma ángulos dados con otras dos líneas que se corten.

ANÁLISIS. El lugar geométrico de las líneas que pasen por *O* y formen un ángulo de 20° con la línea *AO* estará en la superficie de un cono circular recto *A*, con vértice en *O* y de eje *AO*, y con ángulo en el vértice de 20°. Del mismo modo el lugar geométrico de las líneas que forman un ángulo de 25° con la línea *BO* será un segundo cono *B*, con vértice también en *O* y de eje *BO*; mostrándose estos dos conos, gráficamente, en la figura 5·15. Estos dos conos tienen común el vértice *O*, cortándose las dos superficies cónicas según las líneas rectas *XO*, *YO*, perteneciendo los puntos *X* e *Y* a las superficies de las bases de los dos conos, es decir que los dos círculos de las bases de radios *r* y *r'* se cortan en esos puntos *X* e *Y*, siempre que sean iguales las generatrices de ambos conos. Por ello estas dos bases estarán de *O* a la misma distancia *R*, debiéndose encontrar en la superficie de la esfera —que se ve en la figura—

que tiene por vértice O y por radio R. En resumen:

Los dos conos tienen que tener común el vértice y la generatriz.

CONSTRUCCIÓN. En las proyecciones de la figura 5·15, en la vertical, los ejes AO y BO están en su magnitud real y las bases aparecen de perfil. Para encontrar los conos, se hace centro en O y con un radio cualquiera R se traza un círculo; a ambos lados de $a_F O_F$ se trazan los 20° del ángulo en el vértice del cono A, y a los dos lados de $b_F O_F$ se toman los 25° del ángulo en el vértice del cono B. Se trazan las bases que se cortarán en los puntos x_F, y_F, que aparecen unidos en esta proyección vertical, y separados en la circunferencia en la proyección horizontal. La línea solicitada será la XO o la YO.

SOLUCIONES POSIBLES. En el caso mostrado hemos encontrado dos soluciones; pero si el ángulo que forman los dos ejes es menor que la suma de los dos ángulos en el vértice de los dos conos, entonces los conos no se cortarán, y *no habrá solución*. Y si ese ángulo de los dos ejes fuera exactamente igual a la suma referida, indicaría que los conos son tangentes, existiendo solamente *una* solución. Pueden también existir *tres* o *cuatro* soluciones, como veremos en la figura 5·16, cuando los ángulos en el vértice son suficientemente extensos y se prolongan las superficies de los conos.

5·15. Situar una línea que forme ángulos dados con otras dos líneas que se corten (caso general)

PROBLEMA. En la figura 5·16 se dan las líneas AO y BO, que se cortan en el punto O, en las proyecciones horizontal y vertical. Se solicita encontrar una línea, o líneas, que pasando por el punto O, formen un ángulo de 45° con la línea AO y de 60° con la BO.

ANÁLISIS. Este problema es similar al anterior, sólo que ahora las líneas no aparecen en la posición especial que antes tenían, pero queda reducido al caso anterior al construir las proyecciones auxiliares en que se cumpla:

Mostrar un eje del cono como un punto, para que en la proyección adyacente figuren los ejes de los dos conos en su verdadera longitud.

CONSTRUCCIÓN. Primeramente hay que representar las líneas dadas, AO y BO, en las proyecciones auxiliares A, B y C. En la A, se representa AO en su longitud real, para que en la B se proyecte como un punto, y en la C aparecen las dos rectas en su longitud verdadera.

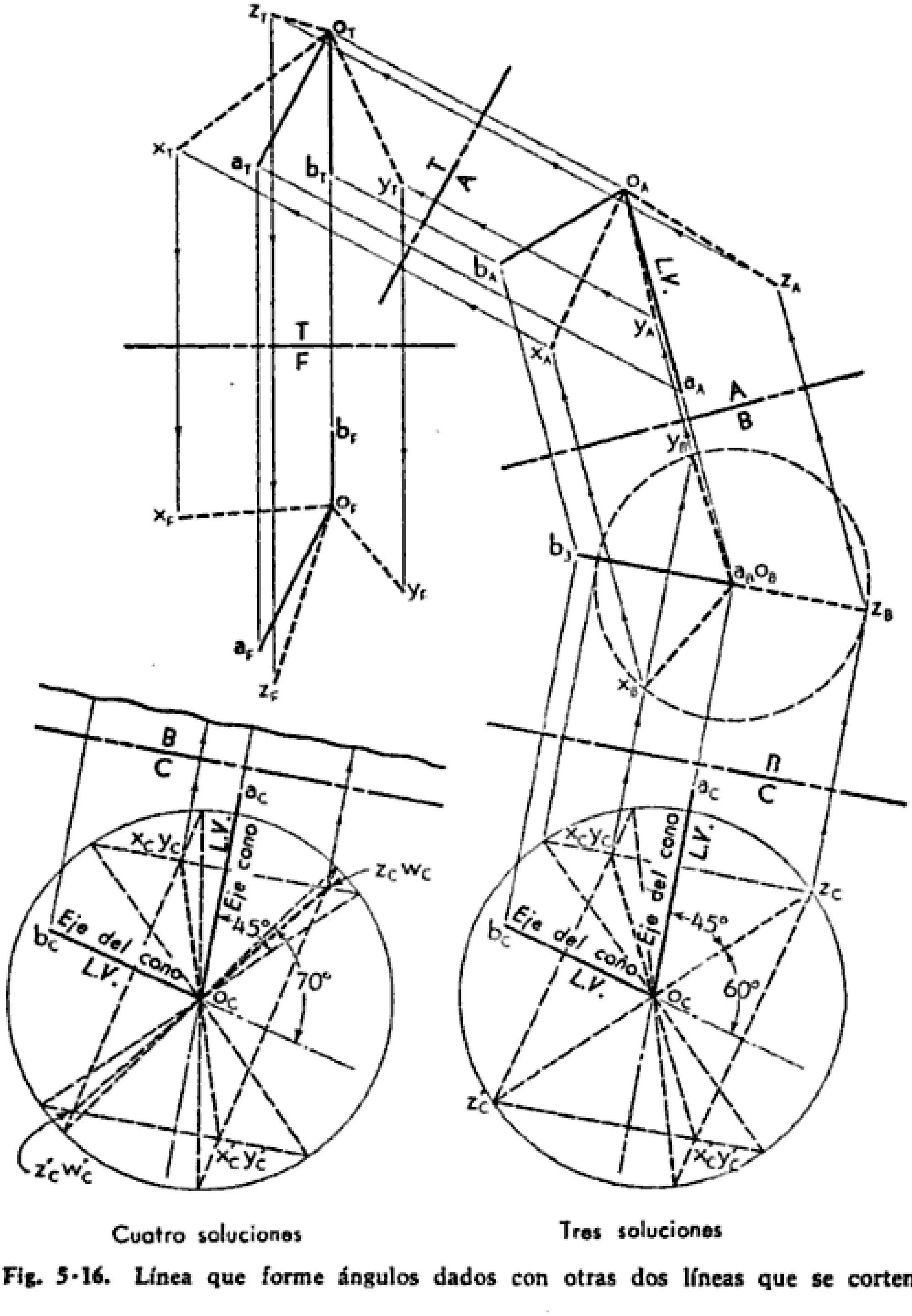
Después, como en la figura 5·15, aparecen representados en forma sencilla los dos conos en las proyecciones B y C.

En este caso, además, las líneas AO y BO se han prolongado más allá de O, mostrándose ambas *hojas* de cada cono. La hoja izquierda del cono de 60° corta a la hoja superior del cono de 45° dando dos soluciones: líneas XO e YO. Pero la hoja derecha del cono de 60° es tangente a la hoja superior del cono de 45°, dando la línea ZO como tercera solución. Las líneas $Z'O$, $X'O$ e $Y'O$ no son otras soluciones sino solamente las prolongaciones respectivas de ZO, XO y de YO.

Habiendo encontrado, en la proyección C, que hay tres soluciones posibles es este caso, cada uno de los puntos X, Y y Z pueden situarse en la proyección B, en la base circular del cono de 45°, en los puntos x_B, y_B, y z_B. Las tres soluciones *XO*, *YO* y *ZO*, se llevan de las proyecciones *C* y *B* a las dadas donde figuran con líneas de trazos.

En la figura 5-16, en la parte inferior izquierda, figura la proyección *C* en el caso de existir cuatro soluciones. El cono que tenía por ángulo en el vértice 60°, ahora tiene 70°, encontrándose las cuatro soluciones: *XO* *YO*, *ZO* y *WO*.

PROBLEMAS. Grupo 55.



Cuatro soluciones

Tres soluciones

Fig. 5-16. Línea que forme ángulos dados con otras dos líneas que se corten.

5·16. Situar una línea que forme ángulos dados con otras dos líneas que se crucen

Este problema se presenta en determinados trabajos de construcción, cuando es preciso unir dos tuberías que se cruzan con una tercera, empleando racores corrientes que son valederos solamente para ciertos ángulos.

Análisis. Al no cortarse las líneas no coinciden los vértices de los conos, pero como la solución, *en dirección*, para dos líneas que se crucen es la misma que la de dos paralelas a las líneas dadas, trazadas por un punto, nos encontraríamos en el caso del problema anterior, por ello:

Resolver el problema con dos líneas que se corten que sean paralelas a las líneas dadas que se cruzan.

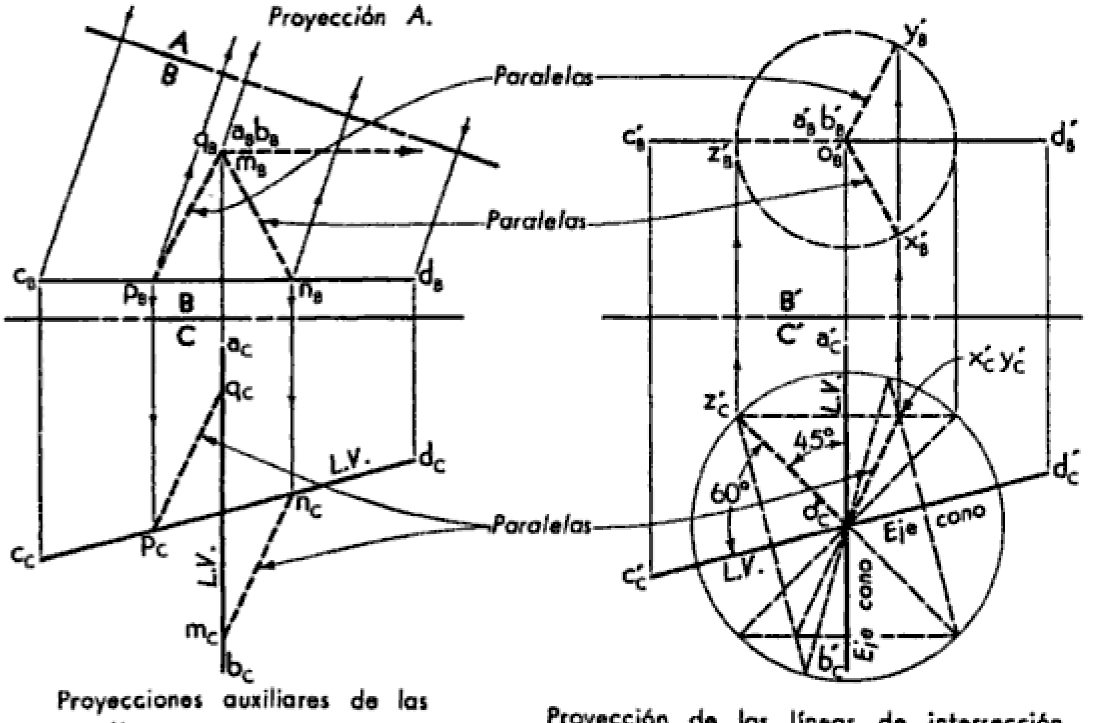


Fig. 5·17. Línea que forme ángulos dados con otras dos que se crucen.

Problema. En la figura 5·17 las líneas *AB* y *CD*, son las líneas dadas que se cruzan, solicitándose una tercera línea que las una, que forme con *AB* un ángulo de 45°, y con *CD* uno de 60°.

Construcción. Lo primero es construir las proyecciones auxiliares que representen las líneas en *posición simplificada*.

En general se necesitan tres proyecciones auxiliares o por lo menos dos como las que se muestran con las líneas dadas en las proyecciones *B* y *C* de la figura 5·17. En la proyección *A* (que no se representa), se indica que la línea *AB* está en su longitud verdadera; para que en la *B* figure como un punto.

La línea de referencia *B*-*C* se ha trazado paralela a c_Bd_B , con lo que las dos líneas dadas figurarán en su longitud verdadera en la proyección *C*. Como no se precisan más que dichas proyecciones *B* y *C*, éstas son las que únicamente se consideran en la figura 5·17.

El segundo paso que vamos a realizar se efectúa en cualquier parte del papel cercano a las proyecciones *B* y *C*. Se traza la línea de referencia *B'*-*C'* paralela a *B*-*C*, situando a *O'* en cualquier sitio y desde él se trazan las líneas *A'B'* y *C'D'* paralelas a las líneas dadas, en las dos proyecciones *B* y *C*. Con lo que ya tenemos dos líneas que se cortan paralelas a las dos iniciales que se cruzan. Y ya se podrán trazar los dos conos con el vértice común *O'*, con una construcción idéntica a la indicada en la figura 5·16, en las dos proyecciones *B* y *C*.

Es evidente que las tres líneas *X'O'*, *Y'O'* y *Z'O'* formarán los ángulos solicitados con las líneas —que aquí se cortan— *A'B'* y *C'D'*. Bastará ahora, en las proyecciones *B* y *C*, trazar las paralelas a las correspondientes líneas de las proyecciones *B'* y *C'*. La línea *MN*, por ejemplo, se ha trazado paralela a *X'O'*, por el punto a_Bb_B se traza m_Bn_B obteniendo el punto n_B en donde encuentra esa recta a c_Bd_B ; luego lo trasladamos a n_C desde donde trazamos la paralela a $x'_Co'_C$ teniendo el punto m_C.

La línea *MN* es por lo tanto una solución posible a este problema, y la *PQ* es la segunda solución trazada paralela a *Y'O'*. La tercera solución es imposible, pues la *AB* paralela a *Z'O'* no se encuentra con la línea *CD*, al ser paralela a ella. Por ello de las tres posibles soluciones solamente hay dos soluciones prácticas. Y en general, para dos líneas que se cruzan, o *no* hay solución, o hay *dos* o *cuatro* soluciones.

PROBLEMAS. Grupo 56.

5·17. Trazar una línea que forme ángulos dados con dos planos

ANÁLISIS. Si una línea que pase por un punto ha de formar un ángulo constante con un plano, estará contenida en una superficie cónica lugar geométrico de todas estas líneas, con un eje perpendicular al plano. A ese ángulo constante se le llama *ángulo base* (véase fig. 5·14), siendo el complemento del *ángulo en el vértice*. Si la línea tiene que pasar por un punto dado *O*, entonces se trazarán dos conos con el vértice común y de ejes perpendiculares a los dos planos dados. Un eje de un cono, en una proyección, tiene que aparecer como un punto, y en otra ambos ejes tienen que figurar en su longitud real, luego debemos:

Mostrar un plano en su tamaño verdadero, y en una proyección adyacente los dos planos deben aparecer de perfil.

PROBLEMA. En la figura 5·18 se pide localizar una línea, o líneas, que pasando por el punto dado *O* formen un ángulo de 60° con el plano *ABCD*, y que tengan una pendiente de 45° (ángulo que forma con el plano horizontal).

CONSTRUCCIÓN. El plano horizontal está en su verdadero tamaño en la proyección horizontal, y en la proyección *A* ambos planos están de perfil. En esa proyección *A*, el eje de un cono, es perpendicular al plano horizontal, y el eje del otro cono es la perpendicular trazada desde *O* al plano *ABCD*. Tracemos la esfera y los dos conos dentro de ella; siendo los ángulos de 45° y de 60°

solución en cualquier par de proyecciones adyacentes, si en una de las proyecciones se muestra *uno* de los ejes como un *punto* y el otro en *longitud verdadera*. Es decir, que siendo perpendiculares los ejes de los conos no es necesario encontrar la proyección que muestre *ambos ejes en sus longitudes reales*.

PROBLEMAS. Grupo 57.

5·19. Trazar una línea que forme ángulos dados con otra línea y con un plano

ANÁLISIS. Uno de los conos debe tener por eje la linea dada, y el eje del segundo cono debe ser perpendicular al plano dado. Y para ver a estos ejes en su posición más sencilla sería preciso:

Mostrar al plano en tamaño real, y en una proyección adyacente a la linea en longitud verdadera.

CONSTRUCCIÓN. Como este problema es tan similar a los que ya antes hemos tratado no se ha representado gráficamente, pero en la figura 4·46 se tienen las ilustraciones de esta clase de proyecciones auxiliares que hay que obtener en este problema.

PROBLEMAS. Grupo 58.

5·20. Otros problemas de lugares geométricos

En los articulos anteriores se ha tratado, únicamente, de trazar una linea que forme ángulos determinados con otras lineas o planos. Se ha visto que por medio de la superficie del cono, lugar geométrico de ángulos constantes, podían resolverse esos problemas. Pero existen otros problemas que se resuelven por medio de otros lugares geométricos engendrados por el movimiento de una linea en determinadas circunstancias originando diversidad de superficies: superficie cónica, cilindrica, alabeada, etc. La determinación de un plano muchas veces se resuelve al encontrar su tangencia a una superficie curva, en un punto determinado; así como para encontrar una superficie curva habrá que estudiar si puede ser un lugar geométrico engendrado por el movimiento de un punto. Por ello es muy interesante el estudio de las superficies curvas, tratándose en los próximos articulos de los problemas que pueden resolverse por medio de otros lugares geométricos.

6. SUPERFICIES DE SIMPLE CURVATURA

6·1. Clasificación de las superficies

Las superficies regulares se pueden considerar divididas en dos clases principales, con las subdivisiones siguientes:

1. SUPERFICIES REGLADAS.
   a. *Poliedros.*
   b. *Superficies de simple curvatura.*
   c. *Superficies alabeadas.*
2. SUPERFICIES DE DOBLE CURVATURA.
   a. *Superficies de revolución.*
   b. *Superficies de evolución.*

Las superficies regladas se engendran por el movimiento de una línea recta, y las de doble curvatura por el de una línea curva. Ya vimos que el movimiento de un punto engendraba una línea, recta o curva; pues del mismo modo el movimiento de una línea, recta o curva, engendra las cinco superficies que hemos enumerado. Las líneas limitan las superficies, y éstas a los cuerpos; pero, sin embargo, podemos considerar a la superficie en sí misma, como algo sustantivo, que aunque tenga espesor sea desatendible por su pequeñez, y así en forma convencional, y para fines prácticos, consideramos superficies a tuberías, conductos, tolvas, y a muchos objetos acanalados o ranurados.

Recalcamos que las *superficies regladas* son engendradas por una línea recta móvil.

Los *poliedros* tienen su superficie completa compuesta de superficies planas (véanse arts. 4·28 al 4·31).

Las *superficies de simple curvatura,* son las engendradas por el movimiento de una línea recta desplazándose por una línea curva directriz, sin perder su contacto, para que en cada dos posiciones consecutivas de esa generatriz se conserve bien paralela a sí misma o cortándose. Los únicos ejemplos de estas clases de superficies son las superficies cónicas, cilíndricas y las convolutas.

Las *superficies alabeadas* son las engendradas, también, por el movimiento de una línea recta, desplazándose sobre dos o tres líneas directrices, con la condición de que dos posiciones consecutivas de la línea generatriz tengan que cruzarse; lo que distingue a estas superficies no desarrollables de las de simple curvatura o desarrollables, en las que dos posiciones seguidas de la generatriz o se cortan o son paralelas.

Las *superficies de doble curvatura* son las engendradas por el movimiento de líneas curvas.

Las *superficies de revolución* se pueden considerar engendradas, esencialmente, por el movimiento de una línea, recta o curva, que gire alrededor de un eje. Con este especial concepto están incluidas, como de *revolución*, las superficies de *simple curvatura*, *alabeadas* y de *doble curvatura*.

Las *superficies de evolución*, solamente pueden ser engendradas por el movimiento de una línea curva, con inclinación constante o variable, siguiendo una trayectoria curva que no sea circular, con cambios de trayectoria o de generatriz.

En los trabajos de ingeniería, las superficies de simple curvatura que tienen más aplicación son la cilíndrica y la cónica, y por ello les dedicaremos mayor atención. Veremos que los métodos resolutivos que se empleen para el cilindro, serán extensivos para el prisma; y los que sirvan para el cono se aplicarán a la pirámide, al considerar a ésta como una variante del cono. Y hasta, con un poco de imaginación, podemos considerar al cilindro como si fuera un cono cuyo vértice se hubiera ido al infinito; por lo que las soluciones de muchos problemas empleadas para el cono, con ligeras modificaciones, se aplicarán también al cilindro.

6·2. Líneas de curvatura

Una línea de curvatura es la trayectoria que sigue un punto que se mueve cambiando constantemente de dirección. Si este punto móvil no sale de un plano, la línea será una *línea curva plana*, o *línea de simple curvatura*; en caso contrario, que la trayectoria no esté en un solo plano, será una *línea curva del espacio*, o *línea de doble curvatura*.

Hay infinitas curvas planas, pero solamente se consideran el número reducido que se emplean en las tareas de Ingeniería. De primordial importancia son las *secciones cónicas*, en las que están incluidas el *círculo*, *elipse*, *parábola* e *hipérbola*. En el Apéndice figuran las propiedades y métodos de construcción de las secciones cónicas. Estas curvas serán tratadas más ampliamente en el artículo 6·8.

Otras curvas planas de importancia práctica son las *Ruletas*, que comprenden el *Cicloide*, *Epicicloide*, y el *Hipocicloide* (que se emplean para los perfiles dentados de engranajes cicloidales); Las *Espirales*, entre las cuales la *Involuta* es la más corriente (que se emplea para los perfiles dentados de engranajes que tienen esa forma); y las *Curvas Trigonométricas*, especialmente la *Sinusoide*, para los estudios referentes a movimientos periódicos.

Las líneas de doble curvatura tienen también una variedad infinita, pero la *hélice*, en sus variadas formas, es con mucho la más corriente (véase artículo 6·27). La intersección de dos superficies de curvatura suele ser una línea de doble curvatura.

6·3. Superficies de simple curvatura

Como dijimos se engendran por el movimiento de una linea recta, llamada *generatriz*, que se desplaza dirigida sobre una *curva directriz*, de tal modo que dos posiciones consecutivas de la generatriz estén en un plano; es decir que las lineas consecutivas han de cortarse o ser paralelas, pero no cruzarse, para que la superficie que obtengamos sea de simple curvatura o desarrollable y no sea alabeada. Comprenderán, pues, solamente las superficies correspondientes al *cono, cilindro*, y a la *convoluta*.

CONOS. El cono está engendrado por una linea recta que se desplaza sobre una linea curva y que pasa siempre por un punto fijo llamado *vértice*, que no esté en el mismo plano que la curva. En la figura 6·1(*a*), la directriz es la linea curva AB; el punto fijo V es el vértice; la linea XY es la generatriz, que al desplazarse siguiendo la linea AB engendra la superficie cónica, llamándose *elemento* de esta superficie a cada posición que tome esa generatriz, la que teniendo que pasar siempre por V, se considera indefinida en ambos sentidos formando dos hojas o ramas de superficie cónica con su movimiento, y así el segmento VX engendra la hoja *inferior* mientras el VY engendra la hoja *superior*. Cuando los elementos de un cono están limitados por un plano, horizontal como el indicado en la figura o bien oblicuo, la curva que resulta de la intersección se llama *base* del cono.

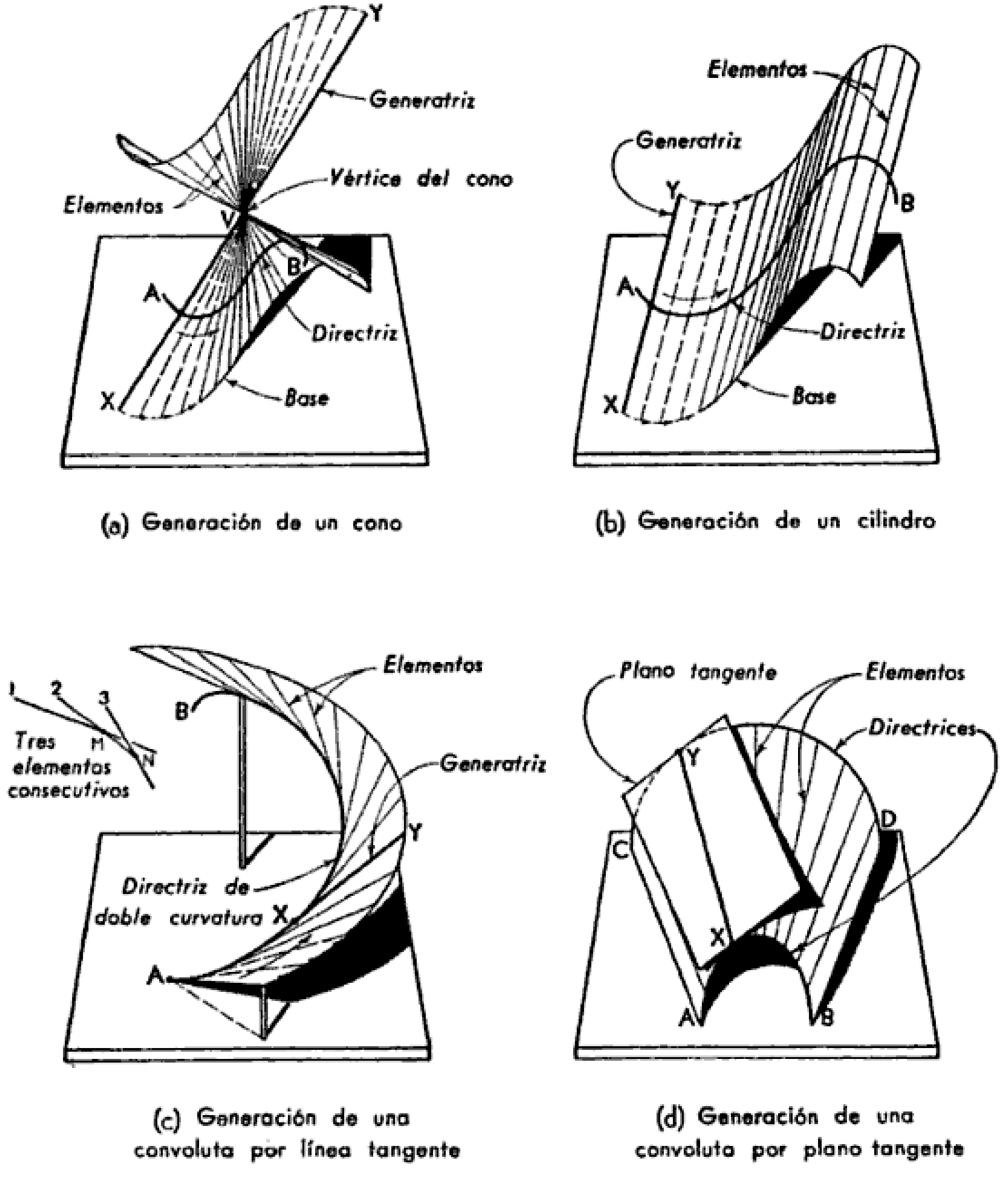
CILINDROS. Un cilindro es engendrado por el movimiento de una linea recta que se desplaza sobre una linea curva plana, permaneciendo siempre en todas sus posiciones *paralela a su posición inicial*. En la figura 6·1(*b*), la directriz es la linea curva plana AB; la linea recta XY es la generatriz, que al desplazarse por AB paralela a su posición inicial engendra la superficie cilíndrica, mostrándose en la figura esas posiciones diversas o *elementos* de la superficie. Aunque la superficie es indefinida se considera limitada por dos planos paralelos horizontales o bien oblicuos, que al cortar a esta superficie originan las curvas que se llaman *bases* del cilindro.

La directriz del cono o del cilindro dijimos que era una linea curva plana, que es lo corriente, pero también puede ser una linea de doble curvatura. Esta directriz puede tener la forma irregular que vemos en la figura 6·1, pero lo más común es que tenga una forma regular y cerrada, soliendo ser una circunferencia o una elipse. A continuación en los artículos que veamos se tratará de los conos y cilindros que corrientemente aparecen en la práctica, sin perder su carácter cuando esas figuras tengan otro aspecto menos familiar.

CONVOLUTAS: GENERACIÓN POR LÍNEA TANGENTE.—Una convoluta puede ser engendrada por una linea recta que se mueva de tal modo que sea siempre *tangente a una linea de doble curvatura*. En la figura 6·1 (*c*) la directriz es la linea de doble curvatura AB, y la linea XY es la generatriz que se traslada por AB, siempre tangente a ella en los sucesivos puntos X, engendrando la convoluta, siendo los elementos de su superficie las distintas posiciones que va tomando XY. La longitud de XY puede ser fija o variable, y se puede extender a ambos lados del punto de tangencia formándose dos hojas de convoluta, siendo de una hoja la que se indica en la figura 6·1 (*c*).

Aunque la convoluta pudiera aparecer como una superficie alabeada es realmente una superficie de simple curvatura, ya que dos posiciones consecutivas de la generatriz se pueden considerar tan cerca como sea preciso para que se corten, y la tercera posición adyacente cortará a una de las dos, como vemos en el dibujo de detalle de la izquierda de la figura 6·1(*c*)., en los puntos de encuentro M y N.

CONVOLUTAS: GENERACIÓN POR PLANO TANGENTE. Una convoluta se puede considerar también engendrada de otro modo de considerable valor práctico. Si colocamos un plano de tal modo que sea tangente a la vez a dos líneas curvas, que no estén en el mismo plano, la línea recta que une los puntos de tangencia similares de las dos curvas será un elemento de la superficie de la convoluta que une las dos curvas. En la figura 6·1(*d*) las *directrices* son las dos curvas semejantes *AB* y *CD*; se coloca al plano tangente de tal modo que sea tangente a la curva *AB* en un punto *X* y a la curva *CD* en un punto *Y*, siendo *XY* un elemento de la superficie. El plano tangente lo será a la superficie de la convo-



(a) Generación de un cono

(b) Generación de un cilindro

(c) Generación de una convoluta por línea tangente

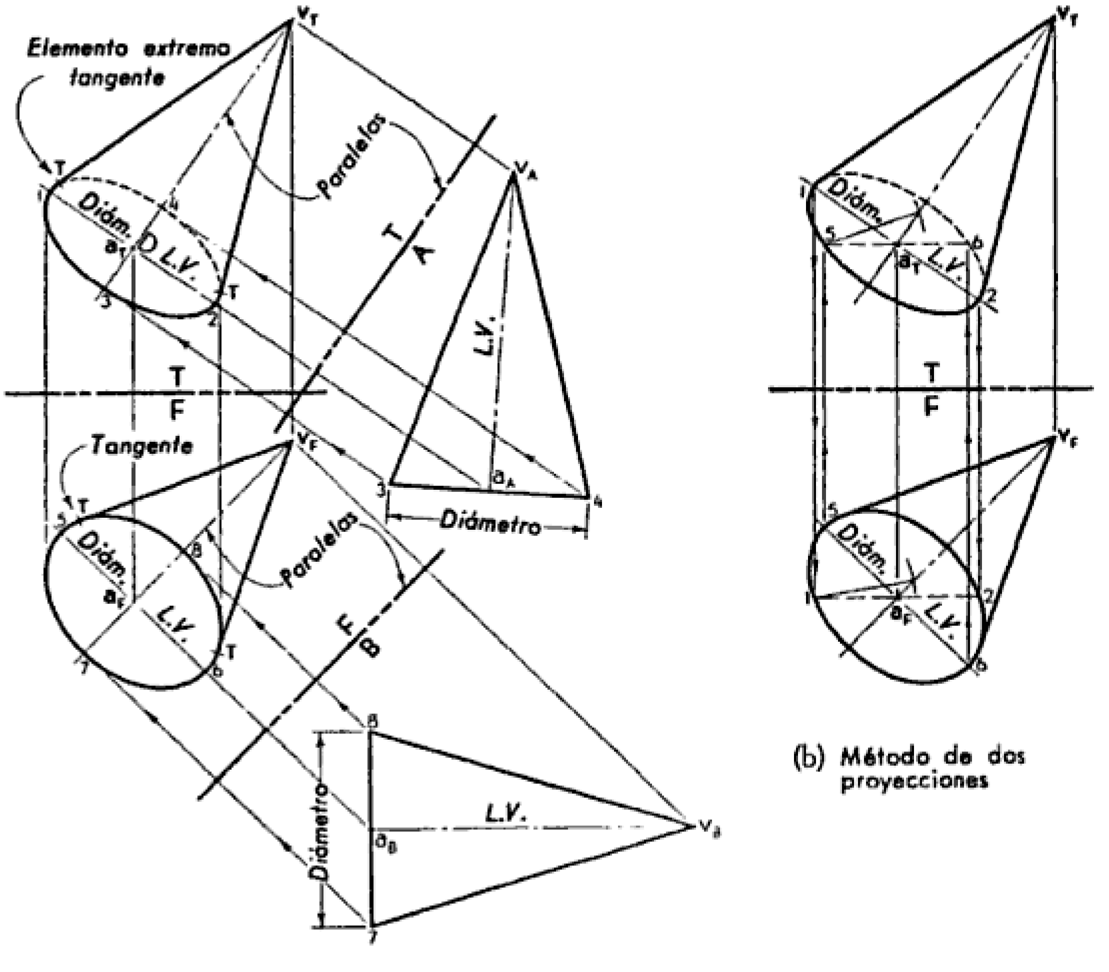
(d) Generación de una convoluta por plano tangente

Fig. 6·1. Generación de las superficies de simple curvatura.

que están en el arco menor $c_T d_T$, comprendidos entre los elementos extremos, tangentes a la elipse. Y los elementos que son visibles en ambas proyecciones, son los comprendidos en el pequeño arco *BD*, lo mismo que ocurría en la figura 6·3.

6·5. Proyecciones principales de un cono circular recto con eje inclinado

En la figura 6·2 vimos un cono circular recto en su posición más sencilla, o sea de eje vertical. Consideremos ahora el mismo cono, pero con el eje inclinado, y base inclinada.



(b) Método de dos proyecciones

(a) Método de proyección de perfil

Fig. 6·5. Proyecciones principales de un cono circular recto con eje inclinado.

ANÁLISIS. La base circular del cono aparecerá como una elipse en las dos proyecciones. Como el eje del cono ha de ser perpendicular al plano de la base, el eje mayor de cada elipse ha de aparecer perpendicular al eje del cono en cada proyección (Regla 15). La dirección de los ejes de la elipse son por lo tanto conocidos, y la longitud de cada eje menor se determina por el método de proyección de perfil del artículo 4·17, o por el método de las dos proyecciones del artículo 4·18.

PROBLEMA. En la figura 6·5 se conocen, el eje VA y el diámetro de la base, y se solicita el trazado de las proyecciones horizontal y vertical del cono circular recto.

MÉTODO DE PROYECCIÓN DE PERFIL. En la figura 6·5(a) los diámetros mayores, 1-2 y 5-6, se han trazado perpendiculares al eje del cono, y en su longitud verdadera, como dato del problema, en las dos proyecciones. Se trazan las proyecciones A y B, para encontrar el eje del cono VA en longitud verdadera, pues la dada en las proyecciones iniciales no lo era; apareciendo la base circular de perfil y perpendicular al eje. Los ejes menores de las elipses, que representan la base circular, se obtienen a partir de las proyecciones A y B.
Una vez conocidos los dos ejes se podrán trazar las dos elipses de la base, y desde el punto dado V las tangentes a las mismas, que no coinciden con las rectas que van a los extremos del eje mayor, y así tendremos los elementos extremos y el poder completar las dos proyecciones solicitadas.

La parte oculta del perímetro de la base, de la elipse de la proyección horizontal, se toma a partir de los puntos de tangencia T, siendo un poco menos de la mitad del perímetro de la base.

MÉTODO DE LAS DOS PROYECCIONES. En la figura 6·5(b), los diámetros mayores en su longitud verdadera 1-2 y 5-6, se han trazado perpendiculares al eje del cono en cada proyección. Para encontrar los ejes menores podemos seguir el método establecido en el artículo 4·18 (y también en el Apéndice, A·8). Y luego las elipses y los elementos extremos se pueden trazar según el método anterior.

6·6. Situación de un punto sobre la superficie de un cono

En el artículo 4·5 ya vimos que para resolver este problema era necesario primeramente, cuando se trataba de una superficie plana, situar al punto sobre una línea de ese plano; pues lo mismo habrá que hacer ahora si la superficie es de simple curvatura, alabeada, o de doble curvatura. Por esto se puede establecer, en términos generales:

Un punto puede ser localizado sobre una superficie, solamente por una vez por medio de una línea o elemento que estando en esa superficie contenga a ese punto.

Un elemento lineal recto es la línea más simple que puede encontrarse en la superficie de un cono, y es generalmente la línea preferida para localizar un punto en una superficie.

En la figura 6·6(a) se supone que se da el punto x_F como punto visible, sobre la superficie de un cono circular recto, solicitándose situar al punto x_T. Por v_F se traza la generatriz correspondiente al punto x_F que corta a la base en el punto a_F. Al ser visible el punto x_F también será visible el elemento v_Fa_F y el punto a_F también será visible y la proyección horizontal x_T estará en la mitad del círculo de la base visible o sea la más cercana a la línea de referencia T-F. Encontrándose el punto x_T en el elemento v_Ta_T y en la paralela desde x_F.

Supongamos de nuevo la figura 6·6(a) en la que ahora nos dan el punto y_T, solicitándose y_F. Como está en un elemento de perfil no puede encontrarse y_F solamente por alineación; pero podemos girar el elemento v_Tb_T hasta la posición extrema del elemento extremo de la proyección vertical, es decir, que y_T pasa a la posición y_T^R y ya por alineación encontramos y_F^R y haciendo una contrarrevolución se encuentra por fin el punto y_F. Si el cono fuera oblicuo, se puede hacer el giro alrededor de un eje vertical, sin emplear la posición del elemento extremo.

En la figura 6·6(*b*) supongamos al punto x_T sobre la superficie de un cono circular oblicuo y se solicita encontrar el punto x_F. El punto x_T está oculto, así como el elemento $v_T x_T$ con el punto a_T de intersección con la base. Por alineación se halla a_F y el elemento visible $v_F a_F$, que con la paralela desde x_T se encuentra x_F; sin precisar elementos extremos.

En la figura 6·6(*c*) la base del cono no aparece de perfil en ninguna de las dos proyecciones, debiendo buscar con sumo cuidado los puntos de la base curva de una proyección con los de la otra proyección adyacente. Se da el punto x_F y hay que hallar x_T. El punto x_F se supone oculto, y por eso el elemento $v_F x_F$ también lo será, no así la intersección a_F con la base. Por a_F se traza la paralela a la proyección horizontal y como es el punto más bajo de esta base, también será el punto más bajo de la base de proyección horizontal, luego se encontrará en a_T, que está en la parte más baja y oculta de esa base. Una vez encontrado a_T se trazará el elemento $v_T a_T$ el que encontrará a la paralela trazada desde x_F en el punto pedido x_T, situado en la parte oculta.

Problemas. Grupo 59.

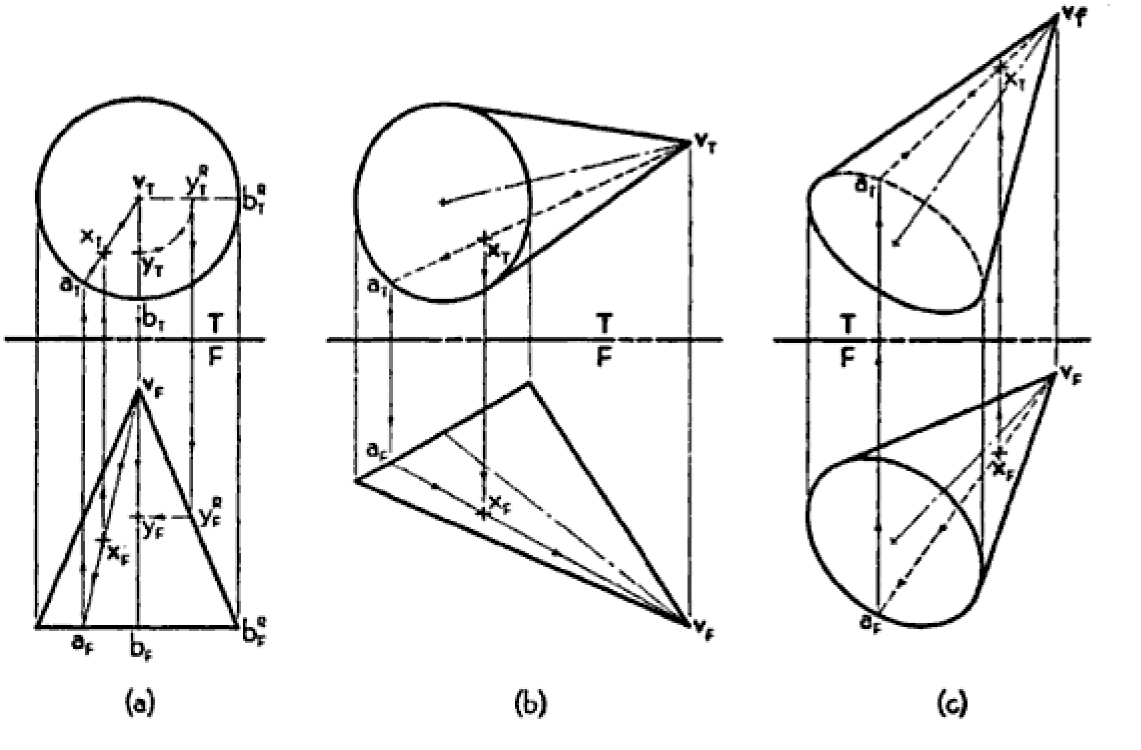


Fig. 6·6. Localización de un punto sobre un cono.

6·7. Intersección de un plano y un cono

Análisis. La intersección de un plano y un cono, será una línea de simple curvatura de forma regular o no según sea la curva de la base. Si se suponen un cierto número de elementos sobre el cono, se podrán localizar los puntos de intersección con el plano dado. A través de esta serie de puntos se puede trazar una línea curva continua y suave, que es la sección plana solicitada.

El procedimiento gráfico será el mismo que el empleado para encontrar la intersección de un plano con un poliedro (arts. 4·29 y 4·30). Podemos encontrar el punto de intersección de cada *elemento supuesto* con el plano dado, por uno o dos métodos.

1. *Mostrando el plano de perfil* (*como se hizo en la fig.* 4·35).
2. *Empleando planos de corte* (*como se hizo en la fig.* 4·36).

Como es necesario localizar un gran número de puntos, entre los dos métodos es el primero (método de proyección de perfil) el más indicado, aunque requiera una proyección adicional.

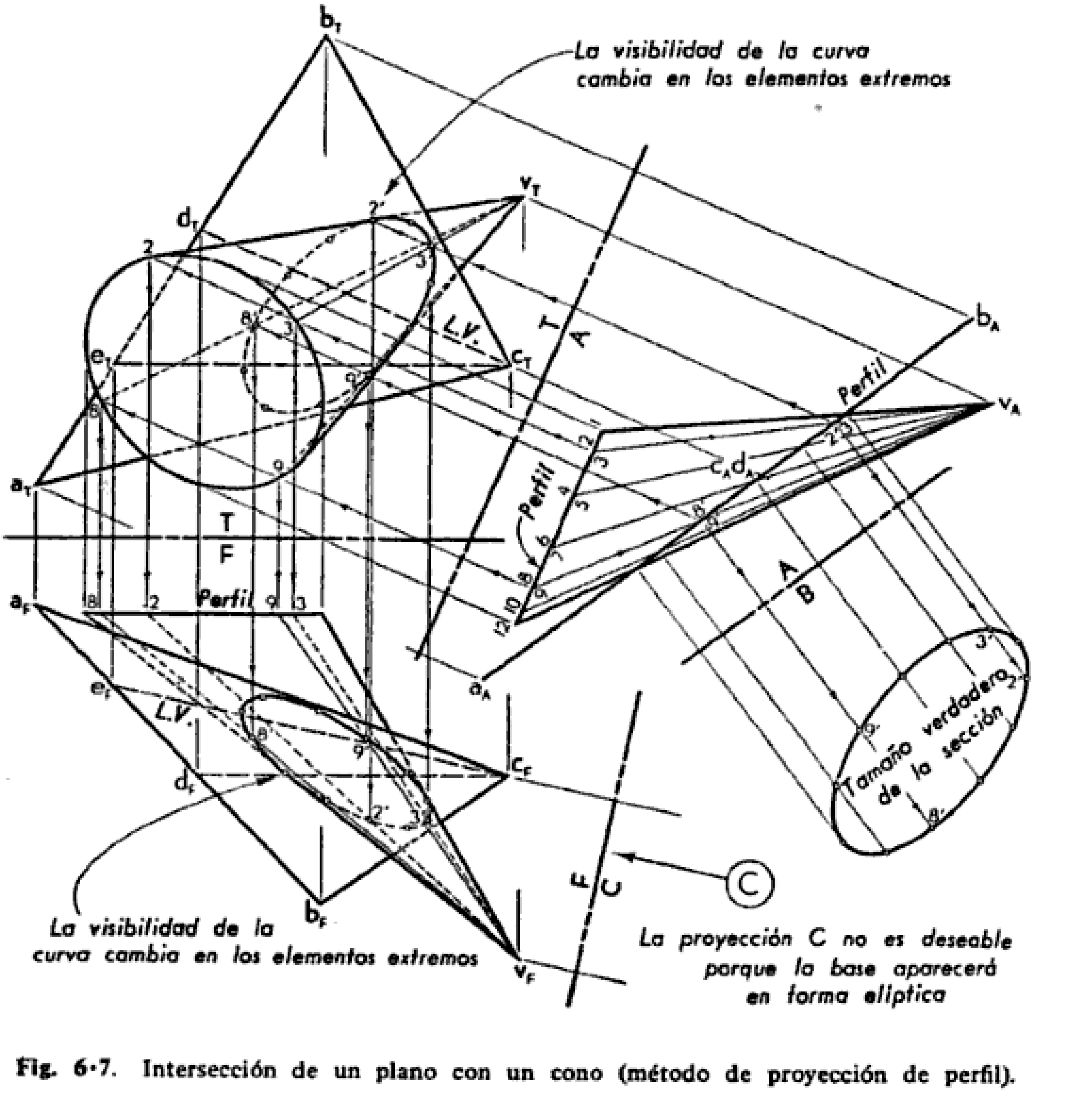


Fig. 6·7. Intersección de un plano con un cono (método de proyección de perfil).

ISBN 84-291-5090-0